

EUR 2620.i

COMUNITÀ EUROPEA DELL'ENERGIA ATOMICA - EURATOM

RISOLUZIONE NUMERICA DI UN PROBLEMA DI DIFFUSIONE DEL CAMPO MAGNETICO

di

LIBRARY COPY

P. STELLA e A. TARONI

1966



Centro Comune di Ricerca Nucleare
Stabilimento di Ispra - Italia

Centro di Trattamento dell'Informazione Scientifica - CETIS

AVVERTENZA

Il presente documento è stato elaborato sotto gli auspici della Commissione della Comunità Europea dell'Energia Atomica (EURATOM).

Si precisa che la Commissione dell'Euratom, i suoi contraenti, o qualsiasi altra persona che agisca in loro nome :

non garantiscono l'esattezza o la completezza delle informazioni contenute nel presente documento, nè che l'uso di qualsiasi informazione, dispositivo, metodo o processo, descritti nel presente documento, non arrechino pregiudizio ai diritti sulle opere dell'ingegno e sulle invenzioni industriali ;

non assumono alcuna responsabilità per i danni che dovessero risultare dall'uso di informazioni, dispositivi, metodi o processi divulgati con il presente documento.

La presente relazione può essere acquistata presso gli uffici vendita indicati nella quarta pagina della copertina

al prezzo di Lit. 750	FF 6.—	FB 60	DM 4.80	Fl. 4.30
-----------------------	--------	-------	---------	----------

All'atto dell'ordinazione, si prega di menzionare il riferimento EUR e il titolo, che figurano sulla copertina di ciascuna relazione.

Stampato da L. Vanmelle, Gent
Bruxelles, febbraio 1966.

Per la riproduzione di questo documento ci si è serviti della miglior copia disponibile.

EUR 2620.i

COMUNITÀ EUROPEA DELL'ENERGIA ATOMICA - EURATOM

RISOLUZIONE NUMERICA DI UN PROBLEMA DI DIFFUSIONE DEL CAMPO MAGNETICO

di

P. STELLA e A. TARONI

1966



Centro Comune di Ricerca Nucleare
Stabilimento di Ispra - Italia

Centro di Trattamento dell'Informazione Scientifica - CETIS

RIASSUNTO

In questo rapporto è trattata la risoluzione numerica di un sistema di equazioni non lineari alle derivate parziali che rappresentano il fenomeno della diffusione di un campo magnetico all'interno di un conduttore metallico cilindrico. Quest'ultimo comprime il campo magnetico con velocità costante.

Sono esaminate varie questioni relative alla natura del sistema; in particolare sono studiate una singolarità delle equazioni, la stabilità dello schema numerico e una trasformazione di coordinate che tenga meglio conto del comportamento della soluzione.

Introduzione (°)

Argomento di questo rapporto è l'analisi e la risoluzione numerica di un particolare sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali. Si tratta di un sistema di due equazioni del secondo ordine, non lineari e in due variabili indipendenti.

Questo sistema, con opportune condizioni iniziali e al contorno, è una rappresentazione matematica del fenomeno della diffusione di un campo magnetico in un liner metallico cilindrico che lo comprime e del corrispondente andamento della temperatura nel liner stesso.

Le incognite del problema sono dunque l'intensità del campo magnetico e la temperatura, funzioni del tempo e di una variabile spaziale.

Dato il carattere non lineare delle equazioni proposte non è possibile risolvere analiticamente il sistema: occorre pertanto procedere alla risoluzione numerica del problema, per esempio col metodo delle differenze finite.

La parte centrale di questo rapporto è dedicata al metodo numerico adottato e alle particolari considerazioni fatte a causa di una singolarità delle equazioni, in corrispondenza dell'asse del cilindro, quando la variabile temporale raggiunge il valore massimo per cui si deve trattare il problema. Allo scopo di ottenere risultati più soddisfacenti si è eseguito un cambiamento della variabile spaziale indipendente, in modo da trasformare l'intervallo seminfinito della variabile spaziale nell'intervallo $(0,1)$.

La trasformazione scelta permette inoltre di avere passi molto piccoli del reticolo spaziale in prossimità dell'asse del cilindro e nello stesso tempo consente di tener conto dell'andamento delle funzioni incognite fino ad una distanza dall'origine

(°) Manoscritto ricevuto il 15 novembre 1965

al di là della quale non si hanno più variazioni sensibili dell'intensità del campo magnetico e della temperatura.

Nell'ultima parte del rapporto sono presentati e discussi vari casi, ottenuti variando i parametri caratteristici del problema, per esempio la velocità o le caratteristiche fisiche del liner.

Questo lavoro è stato svolto nell'ambito di una ricerca sviluppata da J.P. Somon del laboratorio Gas Ionizzati di Frascati, che qui ringraziamo per gli utili suggerimenti e informazioni.

Per una descrizione più dettagliata del problema fisico si veda la bibliografia [3], [4].

1. Descrizione del problema

Il sistema di equazioni proposto è:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau} = 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[F(\theta) (\xi + R^2(k\tau)) \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right]$$

$$(2.1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 4 L^2 (\xi + R^2(k\tau)) F(\theta) \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right)^2$$

con

$$0 < \tau < \frac{1}{k} \quad 0 < \xi < \infty$$

con le condizioni iniziali

$$(3.1) \quad \text{per } \tau = 0 \quad \beta = 1 \quad ; \quad \theta = 1$$

e con le condizioni al contorno

$$(4.1) \quad \text{per } \xi = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \tau} (R^2(k\tau)\beta) = 4 R^2(k\tau) F(\theta) \frac{\partial \beta}{\partial \xi}$$

$$(5.1) \quad \text{per } \xi \rightarrow \infty \quad \beta = 1 \quad ; \quad \theta = 1$$

La funzione $R(k\tau)$ è del tipo:

$$(6.1) \quad R(k\tau) = 1 - k\tau$$

Si trattano i casi con

$$F(\theta) = 1$$

$$F(\theta) = \theta$$

Il problema schematizzato da queste equazioni è il seguente:

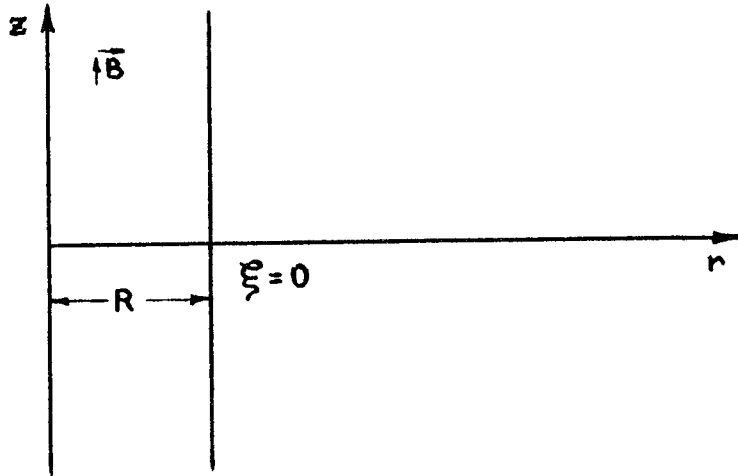


Fig. 1 : Sezione laterale del cilindro

si ha un contenitore cilindrico (liner) di metallo, che si suppone di spessore infinito. Nella zona compresa fra la parete interna del liner e l'asse è creato un campo magnetico; il liner si muove con velocità costante verso l'asse z , comprimendo la regione in cui è creato il campo magnetico.

Si vuol ricavare: I) l'andamento del campo magnetico, il quale è soggetto a due processi, cioè da una parte aumenta per la compressione, perchè il suo flusso totale deve conservarsi, dall'altra dopo un certo tempo, subisce una diminuzione, in quanto diffonde all'interno del metallo; II) l'andamento della temperatura nel corso del movimento.

Le equazioni sono scritte introducendo le variabili adimensionali β e θ . Se B_0 è l'intensità del campo magnetico iniziale, T_0 la temperatura all'inizio del fenomeno

$$\beta = \frac{B}{B_0} \qquad \theta = \frac{T}{T_0}$$

La coordinata ξ è di tipo lagrangiano, infatti il punto $\xi = 0$ è sempre associato alla parete interna del liner, nonostante il suo movimento. La ξ individua quindi i punti interni al liner in un sistema di riferimento solidale col moto del liner stesso. A questo scopo, dato che il liner si muove rigidamente, la coordinata ξ di un punto è scelta proporzionale all'area della sezione di corona cilindrica compresa fra la parete interna del liner e il punto considerato.

La funzione $R(k\tau)$ definita dalla (6.1) rappresenta il raggio della parete cilindrica interna del liner, al tempo τ , riferita alla distanza iniziale R_0 presa come unità di misura.

Si può allora concludere che

$$(7.1) \quad r(\xi, \tau) = (\xi + R^2(k\tau))^{1/2}$$

è la coordinata euleriana di un punto interno al liner, cioè dà la sua distanza dall'asse z , al tempo τ , rispetto ad un osservatore in quiete.

La costante k è legata in modo evidente alla velocità della parete interna del liner; infine $F(\theta)$ e L sono grandezze che dipendono dalle caratteristiche fisiche del mezzo (conducibilità elettrica, permeabilità magnetica, calore specifico del materiale).

Le equazioni in questione si possono ricavare in modo diretto dalle leggi dell'elettromagnetismo.

La prima equazione scende dalla legge di diffusione di un campo magnetico in un mezzo che non sia conduttore perfetto. Questa legge si ricava a sua volta dalle equazioni di Maxwell, trascurando le correnti di spostamento:

$$(8.1) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla(\eta \nabla \cdot \vec{B}) + \text{rot}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

dove η è un coefficiente dipendente dalla permeabilità magnetica e dalla conducibilità elettrica del mezzo. All'equazione (1.1) si arriva tenendo conto che il sistema di coordinate è cilindrico

e che il campo magnetico ha direzione assiale ed è perpendicolare alla velocità del liner.

La (2.1) si ricava dalla legge di Joule, che dà l'energia dissipata per unità di tempo sotto forma di calore, per effetto della corrente elettrica indotta nel liner in corrispondenza ad una variazione del campo magnetico.

Le condizioni iniziali (3.1) esprimono il fatto che al tempo $\tau = 0$ il sistema è indisturbato, cioè β e θ hanno un valore costante.

La condizione (4.1), alla parete interna del contenitore, rappresenta la legge di Faraday-Neumann-Lenz, scritta tenendo conto della legge di Ohm e della legge di Maxwell

$$\text{rot } \vec{B} = 4\pi\vec{J}$$

e, al solito, del fatto che si è in simmetria cilindrica.

Le altre due condizioni al contorno (5.1) esprimono il fatto che, poichè le perturbazioni di β e θ si propagano nel liner con velocità finita, per tutti i tempi che interessano, ad una distanza sufficientemente grande dal punto $\xi = 0$, β e θ mantengono i valori iniziali.

Maggiori informazioni sulla natura fisica del problema si possono trovare nella bibliografia [3] e [4].

2. Analisi delle equazioni

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} = 4 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[F(\theta) (\xi + R^2(k\tau)) \frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right] \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 4 L^2 (\xi + R^2(k\tau)) F(\theta) \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi} \right)^2 \end{cases}$$

La prima equazione si può scrivere nella forma :

$$(1.2) \quad \beta_{\tau} - 4 \beta_{\xi} \left[(F(\theta))_{\xi} (\xi + R^2) + F(\theta) \right] - 4 F(\theta) (\xi + R^2) \beta_{\xi\xi} = 0$$

ed è un caso particolare dell'equazione del secondo ordine:

$$(2.2) \quad a u_{\xi\xi} + 2b u_{\xi\tau} + c u_{\tau\tau} + g = 0$$

con a, b, c, g funzioni di u, ξ, τ e delle derivate del primo ordine. La prima equazione, considerata separatamente è in forma canonica ([1] p.156 vol.II) perchè:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} b &= c = 0 \\ a &= -4 F(\theta) (\xi + R^2) \end{aligned}$$

Si tratta di un'equazione di tipo parabolico che nella forma (1.1) si può interpretare come un'equazione della diffusione in geometria piana pur di considerare come coefficiente di diffusione l'espressione: $4 F(\theta) (\xi + R^2(k\tau))$.

Poichè quando un'equazione è scritta in forma canonica, le derivate che vi compaiono sono prese lungo le direzioni caratteristiche, considerando solo la prima equazione, le sue direzioni caratteristiche sono le parallele all'asse ξ e, trattandosi di un'equazione di tipo parabolico, in ogni linea parallela all'asse ξ , vengono a coincidere due caratteristiche.

La seconda equazione è invece non lineare dal primo ordine.

Si vuol vedere se le condizioni iniziali e al contorno, associate dal problema fisico a queste equazioni, permettono di determinarne la soluzione.

Si considera prima il caso semplice in cui $F(\theta) = 1$, cioè il caso in cui le due equazioni sono disaccoppiate. Il problema si riduce allora alla risoluzione separata di un'equazione parabolica e di una non lineare del primo ordine del tipo:

$$(4.2) \quad \theta_{\tau} = f(\beta, \xi, \tau)$$

con f funzione delle quantità β, ξ, τ tutte note se l'equazione parabolica in β è già stata risolta.

Data un'equazione del primo ordine della forma:

$$au_{\xi} + bu_{\tau} = c$$

con a, b, c funzioni di ξ, τ, u ma non delle derivate di u , le caratteristiche, nel piano ξ, τ sono date dal sistema di equazioni a derivate ordinarie

$$(6.2) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{ds} = a \\ \frac{d\tau}{ds} = b \end{cases}$$

Dalla (4.2) si ricava immediatamente che, nel nostro caso:

$$(7.2) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{ds} = 0 \\ \frac{d\tau}{ds} = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$(8.2) \quad \begin{cases} \xi = \text{cost} \\ \tau = s + \text{cost} \end{cases}$$

cioè le linee caratteristiche sono le parallele all'asse τ .

Dalla teoria delle equazioni a derivate parziali risulta che le condizioni al contorno per la risoluzione delle equazioni vanno assegnate in dipendenza dal numero di caratteristiche distinte o coincidenti che escono dal contorno [1]. Pertanto, per l'equazione parabolica in β bisogna assegnare una condizione per $\xi = 0$ e una per $\xi \rightarrow \infty$, mentre per l'equazione in θ non sono richieste condizioni al contorno. Quest'ultimo fatto si può vedere direttamente dalla forma dell'equazione (4.2) in quanto, una volta assegnati i valori iniziali su tutta la regione che interessa, i valori di θ ai tempi successivi si ottengono integrando per ogni punto dell'asse ξ un'equazione equivalente ad una alle derivate ordinarie.

Se $F(\theta) = \theta$ le equazioni sono accoppiate e i ragionamenti precedenti non si possono applicare. Tuttavia è possibile giungere alle medesime conclusioni trasformando il sistema costituito dalle (1.1) e (2.1) in un sistema equivalente quasi lineare del primo ordine [1].

Questa riduzione si può ottenere ponendo:

$$\beta_{\xi} = \gamma(\xi, \tau)$$

per cui il sistema (1.1) e (2.1) diventa:

$$(9.2) \quad \begin{cases} \beta_{\xi} - \gamma = 0 \\ \beta_{\tau} - 4 [F(\theta) (\xi + R^2(k\tau))\gamma]_{\xi} = 0 \\ \theta_{\tau} - 4L^2 (\xi + R^2(k\tau)) F(\theta)\gamma^2 = 0 \end{cases}$$

Introducendo un vettore \underline{u} di componenti (β, γ, θ) , il sistema (9.2) si può mettere nella forma

$$(10.2) \quad A^{\tau} u_{\tau} + A^{\xi} u_{\xi} + b = 0$$

dove

$$(11.2) \quad A^\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4F(\theta)(\xi+R^2) & -4(F(\theta))_\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dove b è un vettore di componenti:

$$(12.2) \quad b = \begin{pmatrix} -\gamma \\ -4F(\theta) \cdot \gamma \\ -4L^2(\xi+R^2(k\tau)) F(\theta)\gamma^2 \end{pmatrix}$$

L'equazione delle linee caratteristiche nella forma $\varphi(x,y) = 0$, si ottiene eguagliando a zero il determinante della matrice

$$(13.2) \quad A = A^\tau \varphi^\tau + A^\xi \varphi_\xi$$

cioè:

$$(14.2) \quad A = \begin{pmatrix} \varphi_\xi & 0 & 0 \\ \varphi_\tau & -4F(\theta)(\xi + R^2)\varphi_\xi & -4(F(\theta))_\theta \varphi_\xi \\ 0 & 0 & \varphi_\tau \end{pmatrix}$$

da cui

$$(15.2) \quad A = \varphi_\xi [4 F(\theta)(\xi + R^2(k\tau)) \varphi_\xi \varphi_\tau] = 0$$

che ha come radici:

$$(16.2) \quad \begin{array}{ll} \varphi_\tau = 0 & \text{radice doppia} \\ \varphi_\xi = 0 & \text{radice semplice} \end{array}$$

in definitiva si ottengono, come nel caso precedente, caratteristiche coincidenti parallele all'asse ξ e caratteristiche semplici parallele all'asse τ .

Quanto alla condizione al contorno (4.1) per $\xi = 0$, si noti che essa si può scrivere nella forma:

$$(17.2) \quad (R^2\beta)_\tau - 4F(\theta) (R^2\beta)_\xi = 0$$

e interpretata come equazione alle derivate parziali nella regione ξ, τ anzichè come condizione al contorno, è un'equazione del primo ordine in $R^2(k\tau) \cdot \beta(\xi, \tau)$ che ammette come linee caratteristiche le curve:

$$\frac{d\xi}{ds} = -4F(\theta)$$

(18.2)

$$\frac{d\tau}{ds} = 1$$

la (17.2), sempre interpretata come equazione nel piano ξ, τ , ci dice anche che la funzione $R^2(k\tau) \cdot \beta(\xi, \tau)$ è costante nella direzione individuata da

$$(19.2) \quad \frac{d\xi}{d\tau} = -4F(\theta)$$

Vedremo come si può tener conto di queste osservazioni nella trattazione numerica del problema.

3. Schema numerico e analisi di stabilità

Per la risoluzione del nostro sistema di equazioni (1.1) e (2.1) si è adottato il metodo alle differenze finite e precisamente il seguente schema:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\beta_j^{n+1} - \beta_j^n}{\Delta\tau} = \frac{4}{\Delta\xi} \cdot \frac{1}{2} \left\{ F_{j+1/2}^{n+1} \left(\xi_{j+1/2} + (R^2)^{n+1} \right) \cdot \frac{\beta_{j+1}^{n+1} - \beta_j^{n+1}}{\Delta\xi} - \right. \\
 (1.3) \quad & - F_{j-1/2}^{n+1} \left(\xi_{j-1/2} + (R^2)^{n+1} \right) \frac{\beta_j^{n+1} - \beta_{j-1}^{n+1}}{\Delta\xi} + F_{j+1/2}^n \left(\xi_{j+1/2} + \right. \\
 & \left. + (R^2)^n \right) \cdot \frac{\beta_{j+1}^n - \beta_j^n}{\Delta\xi} - F_{j-1/2}^n \left(\xi_{j-1/2} + (R^2)^n \right) \frac{\beta_j^n - \beta_{j-1}^n}{\Delta\xi} \\
 (2.3) \quad & \frac{\theta_{j+1/2}^{n+1} - \theta_{j+1/2}^n}{\Delta\tau} = 4 L^2 \left(\xi_{j+1/2} + (R^2)^n \right) \left(\frac{\beta_{j+1}^n - \beta_j^n}{\Delta\xi} \right)^2 \cdot F_{j+1/2}^n \\
 & \left. \begin{array}{l} \{ n = 1, \dots, M \\ \{ j = 1, \dots, N-1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

con le condizioni:

$$(3.3) \quad \beta_j^0 = 1 \quad \theta_{j+1/2}^0 = 1 \quad (j = 0, \dots, N)$$

$$(4.3) \quad \beta_N^n = 1 \quad (n = 0, \dots, M)$$

$$\begin{aligned}
 (5.3) \quad & \frac{(R^2)^{n+1} \beta_0^{n+1} - (R^2)^n \beta_0^n}{\Delta\tau} = 4 \cdot \frac{1}{2} \left\{ (R^2)^{n+1} F_{1/2}^{n+1} \frac{\beta_1^{n+1} - \beta_0^{n+1}}{\Delta\xi} + \right. \\
 & \left. + (R^2)^n F_{1/2}^n \frac{\beta_1^n - \beta_0^n}{\Delta\xi} \right\}
 \end{aligned}$$

Alla semiretta è sostituito un intervallo finito e la condizione al contorno per $\xi \rightarrow \infty$ è trasportata nel punto $\xi = N\Delta\xi$

La generica grandezza u_j^n rappresenta il valore approssimato di u nel punto del reticolo $(j \cdot \Delta\xi, n \cdot \Delta\tau)$. Questo schema si ottiene costruendo nello spazio (ξ, τ) un reticolo con passo spaziale $\Delta\xi$ e passo temporale $\Delta\tau$ e sostituendo alle derivate dei rapporti incrementali, che si calcolano facendo uso dei valori delle funzioni incognite nei punti del reticolo. L'uso di indici seminteri per il calcolo di θ è stato introdotto allo scopo di ottenere una migliore centratura dello schema e quindi un più alto grado di precisione.

Lo schema, per quel che riguarda l'equazione parabolica in β e la condizione al contorno per $\xi = 0$ è implicito, nel senso che i valori di β nel punto $(j \Delta\xi, (n+1) \Delta\tau)$ non sono calcolati solo in funzione dei valori di β al tempo $n \cdot \Delta\tau$ ma dipendono anche dai valori β_{j-1}^{n+1} e β_{j+1}^{n+1} . Pertanto, ad ogni iterazione, il valore di β_j^{n+1} va calcolato risolvendo, nel modo che vedremo, un sistema lineare.

Lo schema implicito è stato adottato, nonostante la maggiore difficoltà di risoluzione, perchè, come si vedrà dall'analisi di stabilità, esso assicura l'incondizionata stabilità dello schema numerico. Per risolvere il sistema si procede nel seguente modo: supponiamo che il calcolo sia stato eseguito fino al tempo $n \cdot \Delta\tau$; possiamo allora ricavare dalla (2.3) $\theta_{j+1/2}^{n+1}$ per $j = 1, \dots, N-1$ tenendo conto della condizione al contorno (4.3). A questo punto si può risolvere il sistema costituito dalle (1.3) e dalle condizioni al contorno (4.3) e (5.3). Il sistema (1.3) si può scrivere nella forma

$$(6.3) \quad -A_j \beta_{j+1}^{n+1} + B_j \beta_j^{n+1} - C_j \beta_{j-1}^{n+1} = D_j$$

con

$$A_j = \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} F_{j+1/2}^{n+1} (\xi_{j+1/2} + (R^2)^{n+1})$$

$$\begin{aligned}
 (7.3) \quad B_j &= 1 + \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} \left\{ F_{j+1/2}^{n+1} (\xi_{j+1/2} + (R^2)^{n+1}) + \right. \\
 &\quad \left. + F_{j-1/2}^{n+1} (\xi_{j-1/2} + (R^2)^{n+1}) \right\} \\
 C_j &= \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} F_{j-1/2}^{n+1} (\xi_{j-1/2} + (R^2)^{n+1}) \\
 D_j &= \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} F_{j+1/2}^n (\xi_{j+1/2} + (R^2)^n) \beta_{j+1}^n + \\
 &\quad + \left\{ 1 - \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} \left[F_{j+1/2}^n (\xi_{j+1/2} + (R^2)^n) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - F_{j-1/2}^n (\xi_{j-1/2} + (R^2)^n) \right] \right\} \beta_j^n + \\
 &\quad + \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} F_{j-1/2}^n (\xi_{j-1/2} + (R^2)^n) \beta_{j-1}^n
 \end{aligned}$$

Come si vede A_j, B_j, C_j, D_j , sono funzioni note delle quantità calcolate al tempo $n \cdot \Delta\tau$. Si vede che un sistema del tipo (6.3) (tridiagonale), si può facilmente risolvere purchè siano soddisfatte le condizioni

$$\begin{aligned}
 (8.3) \quad A_j &> 0 & B_j &> 0 & C_j &> 0 \\
 B_j &> A_j + C_j
 \end{aligned}$$

Se si scrive ora

$$(9.3) \quad \beta_j^{n+1} = E_j \beta_{j+1}^{n+1} + F_j$$

con

$$E_j = \frac{A_j}{B_j - C_j E_{j-1}} \quad j > 1$$

$$(10.3) \quad F_j = \frac{D_j + C_j F_{j-1}}{B_j - C_j E_{j-1}} \quad j \geq 1$$

e se tenendo conto delle condizioni al contorno, si calcola:

$$(11.3) \quad E_0 = \frac{2\Delta\tau}{\Delta\xi} (R^2)^{n+1} F_{1/2}^{n+1} \left\{ (R^2)^{n+1} \cdot \left[1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\xi} F_{1/2}^{n+1} \right] \right\}$$

$$F_0 = \left\{ \left(1 - \frac{2\Delta\tau}{\Delta\xi} F_{1/2}^n \right) (R^2)^n \beta_0^n + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\xi} (R^2)^n F_{1/2}^n \beta_1^n \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(R^2)^{n+1} \cdot \left[1 + \frac{2\Delta\tau}{\Delta\xi} F_{1/2}^{n+1} \right]}$$

si possono ricavare successivamente β_{N-1}^{n+1} , β_{N-2}^{n+1} etc. fino a β_1^{n+1} .
Si noti che, in accordo con quanto si è ricavato nel paragrafo 2, lo schema numerico scelto non fa mai intervenire i valori al contorno della funzione θ .

Per quanto riguarda la stabilità di questo schema, seguendo il metodo di Von Neumann - Richtmyer, si suppone di dare una piccola perturbazione allo stato iniziale del sistema, cioè:

$$(12.3) \quad \begin{cases} \beta_j = \beta_0 + \sigma_j \\ \theta_j = \theta_0 + \varepsilon_j \end{cases}$$

con σ_j e ε_j , quantità piccole rispetto ai valori iniziali β_0 e θ_0 .

Nell'analisi di stabilità vengono trascurati i termini di secondo ordine in σ_j e ε_j .

Le equazioni (1.3) e (2.3) nell'ipotesi che valgano le (12.3) e che $F(\theta) = \theta$ diventano

$$\begin{aligned}
 \sigma_{j+1}^{n+1} - \sigma_j^n &= \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} \left\{ (\varepsilon_{j+1/2}^{n+1} + \theta_0)(\xi_{j+1/2} + (R^2)^{n+1})(\sigma_{j+1}^{n+1} - \sigma_j^{n+1}) \right. \\
 &\quad - (\varepsilon_{j-1/2}^{n+1} + \theta_0)(\xi_{j-1/2} + (R^2)^{n+1})(\sigma_j^{n+1} - \sigma_{j-1}^{n+1}) \\
 (13.3) \quad &\quad + (\varepsilon_{j+1/2}^n + \theta_0)(\xi_{j+1/2} + (R^2)^n)(\sigma_{j+1}^n - \sigma_j^n) \\
 &\quad \left. - (\varepsilon_{j-1/2}^n + \theta_0)(\xi_{j-1/2} + (R^2)^n)(\sigma_j^n - \sigma_{j-1}^n) \right\}
 \end{aligned}$$

$$(14.3) \quad \varepsilon_{j+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{j+1/2}^n = 4L^2 \frac{\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} (\varepsilon_{j+1/2}^n + \theta_0)(\xi_{j+1/2} + (R^2)^n)(\sigma_{j+1}^n - \sigma_j^n)^2$$

Da cui semplificando e trascurando gli infinitesimi del secondo ordine si ricava:

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^{n+1} - \sigma_j^n &= \frac{2\Delta\tau}{(\Delta\xi)^2} \theta_0 \left\{ (\xi_{j+1/2} + (R^2)^{n+1})\sigma_{j+1}^{n+1} - 2(\xi_j + (R^2)^{n+1})\sigma_j^{n+1} + \right. \\
 (15.3) \quad &\quad + (\xi_{j-1/2} + (R^2)^{n+1})\sigma_{j-1}^{n+1} + (\xi_{j+1/2} + (R^2)^n)\sigma_j^n - \\
 &\quad \left. - 2(\xi_j + (R^2)^n)\sigma_j^n + (\xi_{j-1/2} + (R^2)^n)\sigma_{j-1}^n \right\}
 \end{aligned}$$

$$(16.3) \quad \varepsilon_{j+1/2}^{n+1} - \varepsilon_{j+1/2}^n \approx 0$$

Ciò significa che, nell'approssimazione in cui ci si è posti, si possono fare considerazioni di stabilità semplicemente sull'equazione in β , considerando θ come costante. Dato che per l'equazione parabolica in β si è adottato uno schema implicito che risulta incondizionatamente stabile lo schema complessivo si può considerare stabile.

È chiaro che si tratta di un'analisi di stabilità euristica non solo per la linearizzazione delle equazioni, ma anche perchè non si è tenuto conto delle condizioni al contorno. Ciononostante il risultato ottenuto è stato verificato dalle prove numeriche, almeno quando per la condizione al contorno, si è adottata una discretizzazione di tipo implicito come nella (5.3)

Se tuttavia, per essere più aderenti alla natura del problema, cioè per tener conto delle considerazioni fatte al paragrafo 2, si usa una discretizzazione di tipo esplicito:

$$(17.3) \quad \frac{(R^2)^{n+1} \beta_0^{n+1} - (R^2)^n \beta_0^n}{\Delta\tau} = 4 \left\{ (R^2)^n F_{1/2}^n \frac{\beta_1^n - \beta_0^n}{\Delta\xi} \right\}$$

per valori di $\Delta\tau$ troppo grandi si possono presentare delle instabilità sul contorno che poi si ripercuotono su tutta la regione in cui è eseguito il calcolo.

Più precisamente, se usiamo la (17.3) ci si può aspettare che $\Delta\xi$ e $\Delta\tau$ debbano soddisfare alla condizione di stabilità:

$$(18.3) \quad \Delta\tau < \frac{\Delta\xi}{4 F(\theta)}$$

Come si vedrà più diffusamente in seguito, i $\Delta\xi$ necessari ad una trattazione accurata di questo problema, sono molto piccoli (dell'ordine di 10^{-6}). Se si è costretti ad applicare la condizione (18.3), anche i $\Delta\tau$ usati devono essere molto piccoli e quindi il tempo di calcolo per arrivare a $\tau = \frac{1}{k}$ diviene molto elevato. In generale la (17.3) non è stata quindi adottata anche se, nel caso in cui valga il segno di uguaglianza, cioè

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\xi}{4 F(\theta)}$$

essa approssima molto bene la (4.1). In quest'ipotesi infatti la (17.3) diviene:

$$(R^2)^{n+1} \beta_0^{n+1} = (R^2)^n \beta_1^n$$

il che equivale a dire che il valore di $R^2\beta$ sul contorno è trasportato costante lungo le rette di inclinazione:

$$\frac{\Delta\xi}{\Delta\tau} = -4 F(\theta)$$

4. Trasformazioni di coordinate e risoluzione numerica

Dai primi risultati numerici, ottenuti applicando lo schema alle differenze finite del paragrafo 3, si sono potute notare due cose importanti, ai fini di una trattazione corretta del problema. La prima è che le variazioni sensibili di β e ϑ rispetto al valore iniziale si hanno solamente ad una distanza relativamente piccola dalla parete del liner $\xi = 0$.

La regione di liner interessata varia naturalmente al variare del parametro k , che è proporzionale alla velocità con cui il cilindro conduttore viene spinto verso l'origine. Ciò dipende dal fatto che, quanto minore è la velocità con cui viene compresso il campo magnetico, tanto maggiore è la regione del liner in cui il campo magnetico può diffondere. Pertanto, a seconda del valore di k , è possibile imporre la condizione al contorno (5.1) anziché per $\xi \rightarrow \infty$, per valori di $\xi \leq 1$.

La seconda cosa importante è che il comportamento della soluzione per $\tau \rightarrow 1/k$ è molto sensibile alla scelta del passo $\Delta\xi$ e che, a causa della singolarità delle equazioni per $\tau \rightarrow 1/k$, per ottenere dei risultati attendibili, bisogna fare uso di passi $\Delta\xi$ molto piccoli. Ci si è accorti di questo fatto facendo dei calcoli in cui i passi $\Delta\xi$ erano successivamente dimezzati e osservando come la soluzione fosse estremamente sensibile a queste variazioni. Il fenomeno più indicativo è stato il fatto che nel caso $F(\vartheta) = 1$ per $\tau \rightarrow 1/k$ i valori in prossimità del contorno cominciano a crescere molto rapidamente e in modo da produrre una discontinuità molto marcata della derivata prima di β .

Per esempio :

$$\text{per } k = 100, 0 \leq \xi \leq 0.6, \Delta y = 3 \cdot 10^{-3}$$

e	$t = k\tau = 0.98$	
in	$x = 0$	$\beta = 6.24 \cdot 10^2$
	$x = 1.2 \cdot 10$	$\beta = 1.88 \cdot 10$
	$x = 2.4 \cdot 10^{-2}$	$\beta = 8.75$

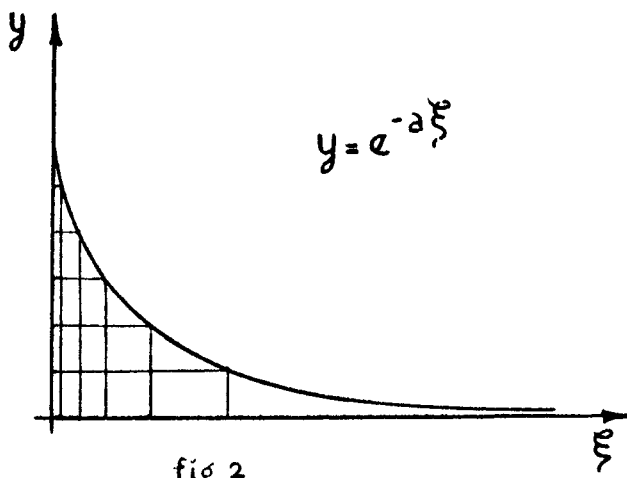
Questo comportamento è tanto più accentuato e comincia a tempi tanto più piccoli, quanto meno il reticolo è fitto. Rimane quindi mascherato il vero andamento di β e ϑ in prossimità dell'origine che, per il problema fisico, è molto importante conoscere.

D'altra parte, per ragioni pratiche (tempo di calcolo e memoria del calcolatore) non è possibile usare dei $\Delta\xi$ molto piccoli ($\leq 10^{-4}$) in tutto l'intervallo dalla ξ che interessa. Non è neppure conveniente adottare una suddivisione con valori di $\Delta\xi$ diversi in zone differenti dell'intervallo, per esempio:

$$\begin{aligned} \Delta\xi &= 10^{-5} & 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ \Delta\xi &= 10^{-4} & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \\ \Delta\xi &= 10^{-3} & \xi_2 \leq \xi \leq \xi_3 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Infatti, se lo schema numerico è di tipo implicito, questo espediente comporta delle notevoli difficoltà nella risoluzione delle (1.1) e (2.1), se si vuole che le differenze spaziali siano sempre ben centrate. Se d'altra parte si introduce uno schema esplicito, per semplificare il passaggio da una regione all'altra, c'è però la difficoltà che $\Delta\tau$ deve essere scelto in modo da soddisfare alla condizione di stabilità (cioè $\Delta\tau \sim (\Delta\xi)^2$) e, se $\Delta\xi$ è scelto piccolo in certe regioni, $\Delta\tau$ è di conseguenza così piccolo che il tempo di calcolo diventa molto grande.

Si è pensato allora ad un cambiamento della variabile indipendente, tale da trasformare l'intervallo $(0, \infty)$ nell'intervallo $(1, 0)$ e tale che, a variazioni costanti della nuova variabile indipendente, corrispondano $\Delta\xi$ molto piccoli in prossimità di $\xi = 0$ e via via sempre più grandi per $\xi \rightarrow \infty$ (fig. 2)



Una trasformazione di questo tipo può essere

$$(1.4) \quad y = e^{-a\xi} \quad a > 1$$

la quale porta a valori $\Delta\xi$ tanto più piccoli per $\xi \rightarrow 0$ quanto più grande è il valore di a . Come si vede per $y \rightarrow 0$, $\Delta\xi \rightarrow \infty$. Tuttavia se si divide in 100 parti l'intervallo $0 \leq y \leq 1$, per valori di a tali che in prossimità di $\xi = 0$ sia $\Delta\xi \leq 10^{-5}$, questa funzione taglia praticamente tutti i valori di ξ maggiori di 10^{-2} . In altre parole tutto l'intervallo, da $\xi \approx 10^{-2}$ a $\xi \rightarrow \infty$, corrisponde ad un solo Δy .

Si è allora cercata una trasformazione che presenti i vantaggi della funzione esponenziale per $\xi \rightarrow 0$, ma ne attenui i difetti per $\xi \rightarrow \infty$. Si è scelta infine la funzione:

$$(2.4) \quad y = \frac{1}{(1+b\xi)^r} = f(\xi) \quad r > 0, b > 0$$

Infatti $y'(0) = -r.b$, mentre per la trasformazione (1.4) $y'(0) = -a$, quindi il comportamento delle due funzioni nell'intorno dell'origine è uguale pur di scegliere $r.b = a$.

D'altra parte la (2.4) riduce molto meno della funzione esponenziale l'intervallo utilizzabile. Ciò si può vedere dalle tabulazioni eseguite per la funzione (1.4) e per la (2.4) al variare dei parametri a, r, b . (Tab. 1 - 2)

Scriviamo ora il sistema (1.1) e (2.1) con le condizioni (3.1), (4.1) e (5.1) supponendo di introdurre, nella maniera vista, una nuova variabile spaziale

$$y = f(\xi)$$

e, per comodità, anche la nuova variabile temporale

$$(3.4) \quad t = k\tau$$

Introducendo poi la funzione

$$(4.4) \quad W(y, t) = \xi(y) + R^2(t)$$

osservando che

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{df[\xi(y)]}{d\xi} = \varphi(y)$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \frac{dy}{d\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(y)$$

le equazioni diventano:

$$(5.4) \quad \beta_t = \frac{4}{k} \varphi(y) [F(\theta) \varphi(y) W(y, t) \beta_y]_y$$

$$(6.4) \quad \theta_t = \frac{4L^2}{k} \varphi^2(y) F(\theta) W(y, t) \beta_y^2$$

con le condizioni

$$(7.4) \quad (R^2 \beta)_t = \frac{4}{k} \varphi(y) R^2 F(\theta) \beta_y \quad \text{per } y = 1$$

$$(8.4) \quad \beta(t, 0) = 1$$

$$(9.4) \quad \beta(0, y) = \theta(0, y) = 1$$

Lo schema alle differenze finite in completa analogia colle (1.3), (2.3), (3.3), (4.3) e (5.3) è :

$$(10.4) \quad \frac{\beta_j^{n+1} - \beta_j^n}{\Delta t} = \frac{4}{k} \varphi_j \frac{1}{2\Delta y} \left\{ F_{j+1/2}^{n+1} \varphi_{j+1/2} W_{j+1/2}^{n+1} \frac{\beta_{j+1}^{n+1} - \beta_j^{n+1}}{\Delta y} - \right. \\ \left. - F_{j-1/2}^{n+1} \varphi_{j-1/2} W_{j-1/2}^{n+1} \frac{\beta_j^{n+1} - \beta_{j-1}^{n+1}}{\Delta y} + F_{j+1/2}^n \varphi_{j+1/2} \right. \\ \left. W_{j+1/2}^n \frac{\beta_{j+1}^n - \beta_j^n}{\Delta y} - F_{j-1/2}^n \varphi_{j-1/2} W_{j-1/2}^n \frac{\beta_j^n - \beta_{j-1}^n}{\Delta y} \right\}$$

$$(11.4) \quad \frac{\theta_{j+1/2}^{n+1} - \theta_{j+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{4L^2}{k} \left(\varphi_{j+1/2} \right)^2 F_{j+1/2}^n W_{j+1/2}^n \left(\frac{\beta_{j+1}^n - \beta_j^n}{\Delta y} \right)^2$$

Con le condizioni al contorno e iniziali

$$(12.4) \quad \frac{(R^2)^{n+1} \beta_N^{n+1} - (R^2)^n \beta_N^n}{\Delta t} = \frac{4}{k} \varphi_N \frac{1}{2} \left\{ (R^2)^{n+1} F_{N-1/2}^{n+1} \frac{\beta_N^{n+1} - \beta_{N-1}^{n+1}}{\Delta y} - \right. \\ \left. - (R^2)^n F_{N-1/2}^n \frac{\beta_N^n - \beta_{N-1}^n}{\Delta y} \right\}$$

$$(13.4) \quad \beta_0^n = 1$$

$$(14.4) \quad \beta_j^0 = \theta_j^0 = 1$$

5. Risultati

Il problema è stato trattato numericamente per vari valori dei parametri k e L nei due casi:

$F(\phi) = 1$ equazioni disaccoppiate

$F(\phi) = \phi$ equazioni accoppiate

e precisamente:

$F(\phi) = 1$	K	10	50	100			
	L	1	1	1			
$F(\phi) = \phi$	K	50	50	50	1000	1000	10000
	L	10^{-2}	10^{-1}	1	10^{-2}	10^{-1}	10^{-1}

Per giudicare sull'attendibilità dei risultati si è dovuto cercare un test, cioè il calcolo di una grandezza il cui valore, per ragioni fisiche, fosse noto. Il test più semplice è parso il calcolo dell'espressione:

$$\Phi(\tau) = \int_0^{\infty} (\beta(\xi, \tau) - 1) d\xi + R^2(k\tau) \cdot \beta(0, \tau)$$

che, com'è noto, essendo il flusso totale del campo magnetico, deve mantenersi costante (nel nostro caso uguale a uno).

Questo test ha permesso di constatare l'importanza della scelta dei parametri r e b nella trasformazione (2.4).

Nel caso disaccoppiato, per esempio, che è sempre il più difficile da trattare, in quanto la funzione β continua a crescere per la compressione del flusso magnetico, e solo per tempi molto prossimi a $1/k$ incomincia a risentire dell'effetto della diffusione attrverso il liner, è importante che il passo $\Delta\xi$ in prossimità del punto $\xi = 0$ sia molto piccolo ($< 10^{-6}$). Infatti, come si è già detto, per $\tau = \frac{1}{k}$ le equazioni presentano una singolarità e in prossimità di questo valore di τ si devono usare dei passi

spaziali e temporali molto piccoli se si vuole che l'effetto della singolarità non si faccia sentire troppo presto, mascherando il vero andamento della funzione β sul contorno.

Nello stesso tempo però è necessario che l'intervallo della ξ in cui viene effettivamente eseguito il calcolo sia tale da tener conto di tutti i punti del liner in cui si ha una perturbazione delle grandezze β e θ . La grandezza dell'intervallo della ξ da utilizzare nel calcolo si può valutare definendo delle opportune grandezze caratteristiche che dipendono dal valore di k e rappresentano il rapporto fra i valori della funzione β e delle sue derivate prima e seconda [4].

E' molto più facile seguire l'andamento del fenomeno nel caso in cui le equazioni sono accoppiate, in quanto β comincia a risentire molto prima della diffusione attraverso il liner e presenta un massimo ben marcato.

Nei casi $F(\theta) = 1$ si è trovato un massimo nei valori al contorno di β per valori di k dell'ordine di 100. Per valori di k superiori, il massimo si trova probabilmente per tempi τ così prossimi a $1/k$ che la singolarità non permette di mettere in luce tale andamento.

D'altra parte, non si può spingere oltre un certo limite la riduzione dei $\Delta\xi$. Infatti, se da una parte si possono scegliere dei valori molto grandi del prodotto $r \cdot b$ nella (2.4) (fino all'ordine di 10^5), si è però costretti, per non avere un'intervallo effettivo della ξ troppo piccolo, a scegliere valori di r tanto più piccoli quanto maggiore è b . Tuttavia se ad esempio $r < 0.3$, l'intervallo della ξ in cui si esegue il calcolo è grande, ma non permette lo stesso una trattazione accurata, in quanto si ha una grande concentrazione di punti in vicinanza dell'origine, ma pochi punti con $\Delta\xi$ molto grandi, in buona parte della zona in cui è ancora importante la variazione di β e θ .