

EUR 4629 f

COMMISSION DES COMMUNAUTES EUROPEENNES

LIBRARY
EUROPEAN COMMUNITY
INFORMATION SERVICE
WASHINGTON, D. C.

COMPORTEMENT MECANIQUE DE
STRUCTURES COMPLEXES EN PRESENCE DE
FLUAGE, D'UN CHAMP DE TEMPERATURE
ET DE VARIATIONS DE DIMENSION
DUES A L'IRRADIATION

par

J. DONEA et S. GIULIANI

1971



Centre commun de Recherche Nucléaire
Etablissement d'Ispra - Italie

Département des Matériaux
Physico-Chimie

AVERTISSEMENT

Le présent document a été élaboré sous les auspices de la Commission des Communautés Européennes.

Il est précisé que la Commission des Communautés Européennes, ses contractants, ou toute personne agissant en leur nom :

ne garantissent pas l'exactitude ou le caractère complet des informations contenues dans ce document, ni que l'utilisation d'une information, d'un équipement, d'une méthode ou d'un procédé quelconque décrits dans le présent document ne porte pas atteinte à des droits privés;

n'assument aucune responsabilité pour les dommages qui pourraient résulter de l'utilisation d'informations, d'équipements, de méthodes ou procédés décrits dans le présent document.

Ce rapport est vendu dans les bureaux de vente indiqués en 4^e page de couverture

au prix de FF 9,45	FB 85,—	DM 6,20	Lit. 1.060	Fl. 6,20
--------------------	---------	---------	------------	----------

Prière de mentionner, lors de toute commande, le numéro EUR et le titre qui figurent sur la couverture de chaque rapport.

Imprimé par Guyot s.a., Bruxelles
Luxembourg, avril 1971

Le présent document a été reproduit à partir de la meilleure copie disponible.

EUR 4629 f

COMMISSION DES COMMUNAUTES EUROPEENNES

EUR 4629 f

MECHANICAL BEHAVIOUR OF COMPLEX STRUCTURES IN PRESENCE OF CREEP, THERMAL STRAINS AND IRRADIATION-INDUCED DIMENSIONAL CHANGES by J. DONEA and S. GIULIANI

Commission of the European Communities
Joint Nuclear Research Centre - Ispra Establishment (Italy)
Materials Department - Physical Chemistry
Luxembourg, April 1971 - 66 Pages - 11 Figures - B.Fr. 85.—

A numerical method of analysis and the associated computer program are presented for the determination of stresses and strains in complex structures encountered in the field of the nuclear technology.

The method is based on the finite-element technique. Plane stress, plane strain and axi-symmetric situations can be investigated.

Material anisotropy, general creep laws, thermal strains as well as irradiation-induced dimensional changes can be taken into account.

Numerical examples are presented to demonstrate the validity of the proposed method of analysis.

DE
NCE DE
LATURE
ON

EUR 4629 f

MECHANICAL BEHAVIOUR OF COMPLEX STRUCTURES IN PRESENCE OF CREEP, THERMAL STRAINS AND IRRADIATION-INDUCED DIMENSIONAL CHANGES by J. DONEA and S. GIULIANI

Commission of the European Communities
Joint Nuclear Research Centre - Ispra Establishment (Italy)
Materials Department - Physical Chemistry
Luxembourg, April 1971 - 66 Pages - 11 Figures - B.Fr. 85.—

A numerical method of analysis and the associated computer program are presented for the determination of stresses and strains in complex structures encountered in the field of the nuclear technology.

The method is based on the finite-element technique. Plane stress, plane strain and axi-symmetric situations can be investigated.

Material anisotropy, general creep laws, thermal strains as well as irradiation-induced dimensional changes can be taken into account.

Numerical examples are presented to demonstrate the validity of the proposed method of analysis.

EUR 4629 f

MECHANICAL BEHAVIOUR OF COMPLEX STRUCTURES IN PRESENCE OF CREEP, THERMAL STRAINS AND IRRADIATION-INDUCED DIMENSIONAL CHANGES by J. DONEA and S. GIULIANI

Commission of the European Communities
Joint Nuclear Research Centre - Ispra Establishment (Italy)
Materials Department - Physical Chemistry
Luxembourg, April 1971 - 66 Pages - 11 Figures - B.Fr. 85.—

A numerical method of analysis and the associated computer program are presented for the determination of stresses and strains in complex structures encountered in the field of the nuclear technology.

The method is based on the finite-element technique. Plane stress, plane strain and axi-symmetric situations can be investigated.

Material anisotropy, general creep laws, thermal strains as well as irradiation-induced dimensional changes can be taken into account.

Numerical examples are presented to demonstrate the validity of the proposed method of analysis.

RÉSUMÉ

Ce rapport décrit une méthode de calcul ainsi qu'un code digital permettant l'étude du comportement mécanique d'un grand nombre de structures complexes rencontrées dans le domaine de la technologie nucléaire.

L'étude, basée sur la méthode des éléments finis, couvre le domaine des structures planes et celui des structures possédant la symétrie axiale.

On a tenu compte de l'anisotropie du matériau, du fluage, du champ de température ainsi que des variations de dimension dues à l'irradiation.

Des exemples numériques sont présentés en vue de démontrer la validité de la méthode d'analyse proposée.

MOTS-CLÉS

PROGRAMMING
COMPUTER CALCULATIONS
STRESSES
STRAIN
ANISOTROPY

CREEP
THERMAL STRESSES
EXPANSION
RADIATION EFFECTS
TENSILE PROPERTIES

Table des matières.

1. Introduction	5
2. Fondements de la solution par la méthode des éléments finis.	7
2.1 Aspect variationnel du problème.	7
2.2 La méthode des éléments finis.	8
2.3 Etude du champ de température.	8
2.4 Le problème des contraintes en présence de fluage et de variations de dimension sous irradiation.	11
3. Equations structurales dérivant du principe de variation des déplacements.	15
3.1 Les structures planes.	15
3.2 Les structures à symétrie axiale.	22
4. Assemblage et solution des équations structurales.	26
4.1 Assemblage des équations.	27
4.2 Méthode de résolution du système linéaire.	28
4.3 Les conditions aux limites et le conditionnement de la matrice.	31
5. Evaluation des contraintes et déformations.	35
6. Calcul des déformations initiales.	36
6.1 Les dilatations thermiques.	37
6.2 Les variations de dimension sous irradiation.	38
6.3 Les déformations de fluage.	39
7. Les étapes de la procédure de calcul.	41
8. Le code digital GOLIA.	43
8.1 Description générale et organigramme succinct.	43
8.2 Problèmes illustratifs.	44
9. Conclusions.	47
Remerciements - Bibliographie - Figures - Appendices A et B .	



1. Introduction. *)

Ce rapport a pour objet la description d'une méthode de calcul et la présentation d'un code digital permettant l'étude du comportement mécanique d'un grand nombre de structures rencontrées dans le domaine de la technologie nucléaire.

Parmi ces structures, nous mentionnerons les éléments de combustible qu'ils soient du type crayon ou sous forme de matrice, les blocs modérateurs et réflecteurs, les enceintes sous pression, etc.

En général, le dessin de ces structures et les propriétés des matériaux mis en oeuvre sont relativement complexes. On conçoit, dès lors, la nécessité d'aborder le problème par une voie numérique capable de traiter des géométries élaborées et de prendre en considération l'anisotropie du matériau de même que les effets du champ de température, du fluage et des variations de dimension sous irradiation.

Nous avons eu recours à la méthode des éléments finis [1] pour résoudre le problème d'analyse des contraintes ainsi posé. Cette méthode permet, comme on le sait, de traiter numériquement les problèmes variationnels associés à la détermination des champs de température et de déformation en s'appuyant sur un même réseau d'éléments discrets. A l'usage, cette technique s'est révélée extrêmement souple et

*) Manuscrit reçu le 10 décembre 1970

a été préférée à la méthode des différences finies. Cette dernière méthode repose sur une discrétisation de l'opérateur différentiel et s'avère particulièrement laborieuse en présence de contours irréguliers. En outre, la solution du problème aux contraintes à l'aide de l'équation biharmonique [2] implique de nombreuses dérivations numériques, ce qui constitue une importante source d'erreurs.

L'inclusion de phénomènes non linéaires dans le formalisme des éléments finis est traitée à l'aide d'une procédure incrémentale [3] transformant le problème original en une série de problèmes linéaires.

Les solutions présentées dans cette étude se réfèrent à des états triaxiaux de contrainte dérivant de champs bidimensionnels de déplacement. Elles couvrent par conséquent le domaine des structures présentant la symétrie axiale et celui des structures planes. Dans ce dernier cas, on pourra envisager les états plans de contrainte ou de déformation ainsi que l'état plan généralisé de déformation. Dans cette dernière hypothèse, la déformation axiale est constante en tout point de la structure, sa valeur est déterminée par la condition d'équilibre axial.

Un code digital permettant la résolution pratique des divers problèmes évoqués ci-dessus a été écrit en Fortran IV et compilé sur l'ordinateur IBM 360/65 du CETIS.

Ce programme dénommé GOLIA comprend une partie principale régissant la séquence des opérations et dix sous-programmes où sont exécutées les diverses phases du calcul. Cette disposition permet à l'utilisateur du programme d'insérer aisément les équations d'état du matériau traité.

On a pris soin de rendre le code GOLIA compatible avec le code TAFE-2 (Temperature Analysis by Finite Elements) [4] et avec le programme de génération automatique du réseau d'éléments finis [5]

La résolution de divers problèmes dont la solution est fournie dans la littérature nous a permis de contrôler la validité des résultats numériques obtenus.

2. Fondements de la solution par la méthode des éléments finis.

2.1 Aspect variationnel du problème.

Il est bien connu que les problèmes fondamentaux de la mécanique sont gouvernés à la fois par des équations différentielles et par des principes de minimum. Le théorème d'Euler du calcul des variations généralise cette propriété particulière des systèmes mécaniques en démontrant l'équivalence entre la recherche de la solution d'une équation différentielle et l'annulation de la première variation de la fonctionnelle pour laquelle l'équation différentielle en question est l'équation d'Euler.

On peut dès lors aborder les problèmes aux limites associés aux équations d'équilibre d'un système et à l'équation de Poisson régissant son champ de température à l'aide d'une formulation variationnelle. Le problème différentiel initial se réduit, dès lors, à la minimisation d'une fonctionnelle appropriée. La méthode des éléments finis fournit un moyen élégant pour résoudre le problème ainsi posé.

2.2 La méthode des éléments finis .

Cette méthode consiste à substituer à la structure continue étudiée un assemblage de petits éléments structuraux de forme appropriée et connectés en un nombre fini de noeuds.

Par opposition à la technique de Ritz, qui définit la totalité du champ de la grandeur étudiée à l'aide d'une fonction paramétrique continue, la méthode des éléments finis dote chaque élément structural d'un champ élémentaire ayant comme paramètres les valeurs de la grandeur inconnue aux points nodaux de l'élément.

L'hypothèse de travail la plus simple consiste à choisir des éléments de forme triangulaire à l'intérieur desquels le champ dépend linéairement des coordonnées. Le champ global de la grandeur inconnue est donc construit par morceaux, mais sa continuité est assurée. L'influence d'un paramètre nodal quelconque sur le champ global étant limitée aux éléments adjacents au noeud considéré, l'évaluation de la fonctionnelle est considérablement simplifiée. En outre, sa minimisation engendre un système d'équations linéaires dont la matrice n'est généralement peuplée qu'aux alentours de la diagonale principale. Un tel système se prête très bien au traitement par calculatrice électronique.

2.3 Etude du champ de température .

Le code TAFE-2 [4] permet de résoudre le problème de l'écoule-

ment conductif de la chaleur en régime établi et en présence d'un champ bidimensionnel de température. Il couvre donc le domaine des structures planes et celui des structures à symétrie axiale.

Pour fixer les idées, supposons qu'on ait à résoudre le problème de Poisson :

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q(x,y) = 0 \quad (2.1)$$

dans un domaine plan R limité par la courbe C avec les conditions :

$$T = T(s) \quad \text{sur la portion } C_1 \text{ du contour } C ;$$

$$q_n = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} - k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \quad \text{sur la portion } C_2 ;$$

$$q_n = \varphi(s) \quad \text{sur la portion } C_3 \quad (2.2)$$

$$q_n - h(T - T_f) = 0 \quad \text{sur la portion finale } C_4 \text{ du contour } C .$$

(s désigne l'abscisse curviligne du contour et n la normale unitaire extérieure) .

Le problème variationnel équivalent consiste à minimiser la fonctionnelle

$$I = \iint_R \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} - Q(x,y) T(x,y) \right] dx dy$$

$$+ \int_{C_3} \varphi(s) T(s) ds + \frac{1}{2} \int_{C_4} h [T(s) - T_f]^2 ds \quad (2.3)$$

avec comme seule condition que $T = T(s)$ sur C_1 .

La fonctionnelle (2.3) exprime en fait le bilan énergétique dans le domaine R. On y retrouve une énergie thermique interne, l'énergie potentielle des sources internes, l'énergie potentielle des flux imposés et l'énergie d'un "ressort thermique" .

Le code TAFE-2 aborde la minimisation de la fonctionnelle (2.3) en découpant la structure étudiée en éléments finis triangulaires connectés en leurs sommets. A l'intérieur de chaque élément, le champ de température est décrit par une fonction linéaire des coordonnées ayant comme paramètres les trois valeurs nodales de la température. Ce choix assure la continuité du champ sur les frontières des éléments. Sur ces mêmes frontières, la dérivée première du champ est discontinue mais finie, tandis que la dérivée seconde est infinie. Comme cette dernière n'intervient pas dans la fonctionnelle, on est assuré que le choix de champs locaux linéaires n'introduit aucune singularité.

On démontre aisément [1] que la minimisation de la fonctionnelle (2.3) par rapport aux températures nodales conduit au système linéaire

$$[K] \{T\} = \{F\} \quad (2.4)$$

où $\{T\}$ est le vecteur des températures nodales à déterminer ;

$[K]$ est la matrice de conductivité complétée par des termes de convection ;

$\{F\}$ représente les "forces thermiques" nodales dues aux sources internes, aux flux imposés et aux termes de convection.

Comme la matrice $[K]$ est symétrique, définie positive et, pour une discrétisation convenable, peuplée aux alentours de sa diagonale principale, on pourra avantageusement résoudre le système (2.4) par la

méthode de Choleski (voir paragraphe 4). En tenant compte de la première condition (2.2) , le champ de température dans la structure sera ainsi déterminé.

2.4 Le problème des contraintes en présence de fluage et de variations

de dimension .

La discrétisation de la structure qui est à la base de la méthode des éléments finis a pour effet de limiter le nombre de degrés de liberté caractérisant la déformation de chaque élément. Cette restriction implique nécessairement des approximations soit sur les conditions de compatibilité, soit sur les conditions d'équilibre, soit sur les deux à la fois.

Parmi la variété de modèles susceptibles de décrire le comportement des éléments finis, deux sont particulièrement intéressants en ce sens qu'ils permettent une estimation directe de la convergence de la solution sur la base de considérations énergétiques. Ces modèles sont le modèle des déplacements et le modèle des forces [6] .

Le modèle des déplacements qui sera utilisé dans notre étude est basé sur le choix de fonctions de déplacement assurant la compatibilité des déformations tant à l'intérieur des éléments qu'à travers leurs frontières. Ce modèle est basé sur le principe de variation des déplacements.

Pour illustrer les choses, plaçons-nous en état plan de contrainte. On entend par "champ" , un champ de contraintes et déformations liées par des équations énergétiques

$$\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \quad \sigma_y = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \quad (2.5a)$$

où $W(\varepsilon)$ est la densité d'énergie de déformation.

Un champ est intégrable s'il existe des fonctions de déplacement $u(x,y)$ et $v(x,y)$ à détermination unique et différentiables de manière continue telles que

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.5b)$$

Un champ est compatible si les fonctions de déplacement satisfont aux conditions prescrites pour les déplacements sur certaines parties C_u

du contour :

$$u = \bar{u} \quad v = \bar{v} \quad \text{sur } C_u \quad (2.5c)$$

Un champ est équilibré lorsque les contraintes satisfont aux équations d'équilibre interne et de surface [6]:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \bar{X} = 0 \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \bar{Y} = 0 \quad (2.5d)$$

$$l \sigma_x + m \tau_{xy} = \bar{p}_x \quad l \tau_{xy} + m \sigma_y = \bar{p}_y \quad \text{sur } C_s \quad (2.5e)$$

C_s est la portion du contour complémentaire à C_u .

Le principe de variation des déplacements s'énonce :

$$\delta (U - P) = 0 \quad (2.6)$$

où

$$U = \iint W(\epsilon) dx dy \text{ est l'énergie de déformation totale}$$
$$P = \iint (\bar{X} u + \bar{Y} v) dx dy + \int_{C_s} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v) ds$$

est l'énergie potentielle des forces prescrites.

Seuls les déplacements u et v sont soumis à variation; ils doivent à priori satisfaire aux conditions (2.5b) et (2.5c) .

Le problème de la minimisation de la fonctionnelle (2.6) est traité en découpant la structure à l'aide d'éléments finis triangulaires. Un tel élément possède six degrés de liberté à savoir trois sommets et deux composantes du déplacement en chacun d'eux. En vue d'en assurer la compatibilité, on décrit la déformation de chaque élément à l'aide d'un champ de déplacement dépendant linéairement des coordonnées et ayant comme paramètres les six composantes nodales du déplacement.

On exprime ensuite l'énergie de déformation de chaque élément en fonction des déplacements aux noeuds. La loi de Hooke permet de relier linéairement les composantes de la contrainte à celles de la déformation, si bien que l'énergie de déformation apparaît comme une fonction quadratique des déplacements nodaux.

L'énergie potentielle de la structure complète s'obtient par sommation des énergies de déformation élémentaires et soustraction du travail des forces externes prescrites. Finalement, la minimisation de l'énergie potentielle par rapport aux déplacements nodaux fournit un système d'équations linéaires déterminant la solution du problème.

L'inclusion des phénomènes non linéaires dus au fluage est traitée à l'aide d'une procédure incrémentale transformant le problème

original en une série de problèmes linéaires. A cet effet, on admet qu'à tout instant la déformation totale est la somme :

$$\{\varepsilon^t\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^{th}\} + \{\varepsilon^m\} + \{\varepsilon^c\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^n\} \quad (2.7)$$

d'une déformation élastique, d'une dilatation thermique et de déformations dues aux variations de dimension ainsi qu'au fluage.

La technique utilisée consiste à rendre le problème linéaire en considérant les trois dernières composantes de la déformation totale comme formant une déformation initiale connue. Puisque les déformations de fluage dépendent de manière généralement non linéaire de l'état de contrainte, la mise en oeuvre d'une telle technique nécessite une procédure incrémentale, c.a.d un découpage adéquat de l'axe du temps de manière à pouvoir attribuer aux contraintes une valeur moyenne constante pendant chaque intervalle de temps. Les étapes successives conduisant à la solution du problème seront décrites au paragraphe 7 .

On montrera au paragraphe 3 comment les dilatations initiales propres à chaque intervalle de temps peuvent être incorporées dans le formalisme des éléments finis sous la forme de forces nodales fictives. Ce procédé offre l'avantage de garder intacte la matrice du système linéaire gouvernant les déplacements nodaux. Seul le membre de droite de ce système doit être ajusté au fur et à mesure que la solution progresse dans le temps. On montrera également que la solution des équations aux déplacements nodaux à l'aide de la méthode de Choleski est particulièrement efficace tant au point de vue de l'occu-

pation des mémoires de l'ordinateur qu'en ce qui concerne le temps requis pour obtenir les solutions successives.

3. Equations structurales dérivant du principe de variation des déplacements.

Dans ce paragraphe nous formulerons les équations dérivant du principe de variation des déplacements énoncé au paragraphe précédent. Quoique les solutions présentées se réfèrent toutes à des champs de déplacement bidimensionnels, nous présenterons séparément les problèmes plans et celui des structures à symétrie axiale.

3.1 Les structures planes .

Nous concentrerons notre attention sur l'état plan généralisé de déformation où la déformation axiale est constante sur toute la section droite de la structure. L'état plan de déformation ($\xi_z = 0$) apparaîtra comme un cas particulier de l'état plan généralisé, tandis que le problème de contrainte plane ($\sigma_z = 0$) sera résolu en modifiant le module de Young et le coefficient de Poisson dans le problème correspondant de déformation plane.

Supposons avoir couvert la section droite de la structure étudiée à l'aide d'éléments finis triangulaires. Un élément quelconque est défini par ses trois sommets i, j, k numérotés dans le sens antihorlogique (Fig. 1) et possède six degrés de liberté : trois sommets et deux composantes du déplacement en chacun d'eux.

En vue d'assurer la continuité entre éléments adjacents, on dé-

crit le déplacement à l'intérieur de chaque élément par une fonction linéaire des coordonnées :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [M(x,y)] \{\alpha\} \quad (3.1)$$

où $\{\alpha\}$ est la matrice colonne des déplacements généralisés.

Appliquée aux trois sommets de l'élément la relation (3.1) permet d'exprimer les déplacements généralisés en fonction des déplacements nodaux :

$$\{\alpha\} = [C] \{S^e\} \quad (3.2)$$

où, en indiquant par la lettre T la transposition

$$\{S^e\}^T = (u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k) \quad (3.3)$$

tandis que

$$[C] = \frac{1}{2 \Delta} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

On a posé

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \\ \Delta &= \text{aire du triangle } i,j,k \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les autres coefficients de la matrice $[C]$ s'obtiennent par permutation des indices dans l'ordre i,j,k .

Le champ de déplacement dans le plan de l'élément s'exprime, dès lors, en fonction des déplacements aux noeuds par la relation

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [M(x,y)] [C] \{\delta^e\} \quad (3.6)$$

Les composantes planes de la déformation totale sont liées aux déplacements par les relations (2.5b) qui, compte-tenu de (3.6) s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^t \\ \varepsilon_y^t \\ \gamma_{xy}^t \end{Bmatrix} = [N] [C] \{\delta^e\} \quad (3.7)$$

avec

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

La déformation axiale totale ε_z^t est par hypothèse constante dans tous les éléments.

Dans le cas d'un matériau transversalement isotrope (Fig. 2a), où E_1, ν_1 désignent les propriétés dans la section droite et E_2, ν_2 celles de la direction normale, les contraintes planes sont liées aux composantes élastiques de la déformation par la relation

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D^*] (\{\varepsilon^t\} - \{\varepsilon^n\}) \quad (3.9)$$

où $\{\varepsilon^t\}^T = (\varepsilon_x^t, \varepsilon_y^t, \gamma_{xy}^t, \varepsilon_z^t)$

et de même pour $\{\varepsilon^n\}$ défini par (2.7)

En posant $n = \frac{E_1}{E_2}$ la matrice $[D^*]$ s'écrit :

$$[D^*] = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n(\nu_1+n\nu_2^2) & 0 & n\nu_2(1+\nu_1) \\ n(\nu_1+n\nu_2^2) & n(1-n\nu_2^2) & 0 & n\nu_2(1+\nu_1) \\ 0 & 0 & n(1-\nu_1-2n\nu_2^2) & 0 \end{bmatrix}$$

La loi de Hooke permet d'exprimer la contrainte axiale sous la forme

$$\sigma_z = E_2 (\varepsilon_z^t - \varepsilon_z^n) + \nu_2 (\sigma_x - \sigma_y) \quad (3.10)$$

Les composantes (3.9) (3.10) de la contrainte font intervenir la déformation axiale totale. Cette dernière peut être calculée en exprimant l'équilibre axial :

$$P_z - \iint \sigma_z \, dx \, dy = 0 \quad (3.11)$$

où P_z est la charge appliquée axialement.

En introduisant dans l'équation (3.11) la valeur de σ_z donnée en (3.10) on obtient

$$\varepsilon_z^t = \frac{1}{E_2 A} \left[\sum_{\text{éléments}} \left\{ E_2 \varepsilon_z^n - \nu_2 (\sigma_x + \sigma_y) \right\} \Delta + P_z \right] \quad (3.12)$$

où $A = \sum \Delta$ est l'aire de la section droite.

Les composantes axiales étant déterminées par les relations (3.10) et (3.12), appliquons le principe de variation des déplacements (2.6) aux composantes planes.

L'énergie de déformation totale due aux composantes planes a pour valeur

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon_x^e \sigma_x + \varepsilon_y^e \sigma_y + \gamma_{xy}^e \tau_{xy} + \varepsilon_z^e \sigma_z) \, dV \quad (3.13a)$$

tandis que l'énergie potentielle des forces superficielles $\{p\}$ prescrites dans le plan s'écrit en vertu de (3.6)

$$P = \int_{C_s} \{f\}^T \{p\} \, ds \quad (3.13b)$$

V est le volume de l'élément triangulaire et C_s la surface latérale sur laquelle les forces $\{p\}$ sont appliquées.

Les expressions (3.6), (3.7) et (3.9) permettent d'écrire

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} \{s^e\}^T [C]^T [N]^T [D] [N] [C] \{s^e\} - \{s^e\}^T [C]^T [N]^T [D^*] \{E^n\} + \{s^e\} [C] [N] D^{**} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^t \\ \varepsilon_y^t \\ 0 \end{pmatrix} \right) dV \quad (3.14a)$$

$$P = \int_{C_s} \{s^e\}^T [C]^T [M(x, y)]^T \{p\} ds \quad (3.14b)$$

La matrice $[D]$ est constituée par les trois premières colonnes de la matrice $[D^*]$ (3.9) tandis que

$$D^{**} = \frac{n \nu_2 E_2}{1 - \nu_1 - 2 n \nu_2^2}$$

En égalant à zéro les premières variations de $(U - P)$ par rapport aux déplacements nodaux, on obtient le système linéaire gouvernant ces derniers sous la forme

$$[K^e] \{s^e\} = \{F\} + \{Q\} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \text{où } [K^e] &= [C]^T \left[\int_V [N]^T [D] [N] dV \right] [C] = \\ &= [C]^T [K^*] [C] \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned} \{F\} &= [C]^T \int_V [N]^T [D^*] \{E^n\} dV - [C]^T \int_V [N]^T D^{**} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^t \\ \varepsilon_y^t \\ 0 \end{pmatrix} dV = \\ &= [C]^T [\{F^n\} + \{F^z\}] \end{aligned} \quad (3.16b)$$

$$\{Q\} = [C]^T \int_{C_s} [M(x, y)]^T \{p\} ds = [C]^T \{Q^p\} \quad (3.16c)$$

En vertu de la dualité entre équilibre et principe de minimum, les équations (3.15) ne font que traduire l'équilibre nodal de l'élément

considéré sous l'effet :

- a) des forces nodales généralisées que la matrice de rigidité $[K^e]$ associe au champ de déplacement.
- b) des forces statiquement équivalentes aux dilatations thermiques, aux variations de dimension ainsi qu'au fluage.
- c) des forces résultant de la dilatation axiale totale.
- d) des forces extérieures prescrites.

Un vecteur nodal quelconque $\{F\}$ a ses composantes rangées de telle sorte que

$$\{F\}^T = (F_{xi}, F_{yi}, F_{xj}, F_{yj}, F_{xk}, F_{yk})$$

Puisque en plus de la matrice $[C]$, les matrices $[N]$ et $[D]$ ne dépendent pas des coordonnées, on obtient en supposant les déformations $\{\varepsilon^n\}$ et ε_z^t constantes à l'intérieur de l'élément :

$$[K^*] = \frac{E_2 \Delta}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & n(1-n\nu_2^2) & 0 & 0 & 0 & n(\nu_1+n\nu_2^2) \\ & & \frac{n(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}{2} & 0 & \frac{n(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}{2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{n(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}{2} \\ & & & & & & n(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix}$$

symétrique

(3.17a)

$$\{F^n\} = \frac{E_2 \Delta}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ n(1-n\nu_2^2)\varepsilon_x^n + n(\nu_1+n\nu_2^2)\varepsilon_y^n + n\nu_2(1+\nu_1)\varepsilon_z^n \\ 0,5 n(1-\nu_1-2n\nu_2^2)\gamma_{xy}^n \\ 0 \\ 0,5 n(1-\nu_1-2n\nu_2^2)\gamma_{xy}^n \\ n(\nu_1+n\nu_2^2)\varepsilon_x^n + n(1-n\nu_2^2)\varepsilon_y^n + n\nu_2(1+\nu_1)\varepsilon_z^n \end{array} \right\}$$

(3.17b)

$$\{F^z\} = - \frac{n \nu_2 E_2 \Delta \varepsilon_2^t}{(1 - \nu_1 - 2n \nu_2^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.17c)$$

$$\{Q^P\} = \int_{C_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} ds \quad (3.17d)$$

où p_x et p_y désignent les composantes des forces superficielles prescrites.

Considérons le cas fréquent d'une pression normale uniforme p appliquée sur le côté $i-j$ de l'élément représenté à la figure 3.

Les composantes de p sont

$$\begin{aligned} p_x &= p \cos \theta = - p \, dy/ds' \\ p_y &= p \sin \theta = p \, dx/ds' \end{aligned} \quad (3.17e)$$

En considérant une tranche d'épaisseur unitaire dans la direction axiale $ds = 1 \times ds'$ si bien que

$$\{Q^P\} = p \int_i^j \begin{pmatrix} -dy \\ -x \, dy \\ -y \, dy \\ dx \\ x \, dx \\ y \, dx \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} (y_i - y_j) \\ \alpha (y_i - y_j) + \frac{\beta}{2} (y_i^2 - y_j^2) \\ \frac{1}{2} (y_i^2 - y_j^2) \\ (x_j - x_i) \\ \frac{1}{2} (x_j^2 - x_i^2) \\ \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2} (x_j^2 - x_i^2) - \alpha (x_j - x_i) \right] \end{pmatrix} \quad (3.17f)$$

où

$$\beta = \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \quad \text{et} \quad \alpha = x_i - \beta y_i$$

Avant de passer à l'assemblage des équations structurales (3.15) pour tous les éléments de la structure, nous établirons ces mêmes équations pour les structures possédant la symétrie axiale .

3.2 Les structures à symétrie axiale.

Lorsqu'une structure possède la symétrie axiale tant au point de vue géométrique qu'en ce qui concerne la mise en charge, les composantes du déplacement dans tout plan sectionnant la structure selon son axe de symétrie déterminent complètement les états de contrainte et de déformation.

Dans ces conditions, en désignant par r et z les coordonnées radiale et axiale et par u et v les déplacements correspondants, on constate que les fonctions (3.1) permettent encore de définir le champ de déplacement dans l'élément à section triangulaire i, j, k représenté à la figure 4 . On écrira dès lors :

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [M(r,z)] [C] \{\delta^e\} \quad (3.18)$$

Cette fois, le volume associé à un élément est celui d'un anneau d'ouverture angulaire unitaire dans la direction azimutale.

En coordonnées cylindriques, les relations entre déplacements et déformations totales s'écrivent

$$\varepsilon_r^t = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \varepsilon_\theta^t = \frac{u}{r} \quad \varepsilon_z^t = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \gamma_{rz}^t = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}$$

soit, en vertu du choix (3.18) et par analogie avec (3.7) :

$$\{\varepsilon^t\} = [N(r,z)] [C] \{\delta^e\} \quad (3.19)$$

où $\{\varepsilon^t\}^T = (\varepsilon_r^t, \varepsilon_z^t, \varepsilon_\theta^t, \gamma_{rz}^t)$

$[C]$ est la matrice (3.4) et $\{\delta^e\}$ le vecteur (3.3) des déplacements nodaux, tandis que :

$$[N(r,z)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $[N]$ fait à présent intervenir les coordonnées r et z , si bien que les déformations à l'intérieur de l'élément ne sont plus constantes comme c'était le cas pour les états plans.

Dans le cas d'un matériau transversalement isotrope (Fig. 2b), où E_1, ν_1 désignent les propriétés dans le plan normal à l'axe de symétrie et E_2, ν_2 celles de la direction de l'axe, les contraintes sont liées aux composantes élastiques de la déformation par la relation

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon^t\} - \{\varepsilon^n\}) \quad (3.20)$$

où $\{\sigma\}^T = (\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz})$

$$\{\varepsilon^n\} = \{\varepsilon^{th}\} + \{\varepsilon^w\} + \{\varepsilon^c\} \quad (\text{voir équation (2.7)})$$

$$[D] = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & n(\nu_1+n\nu_2^2) & 0 \\ & 1-\nu_1^2 & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ & & n(1-n\nu_2^2) & 0 \\ \text{symétrique} & & & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix}$$

On a posé : $n = \frac{E_1}{E_2}$ et $m = \frac{G_2}{E_2}$

En vue d'appliquer le principe de variation des déplacements, nous construisons l'expression de l'énergie de déformation totale sous la forme

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon^e\}^T \{\sigma\} dV$$

soit, en vertu de (3.19) et (3.20)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\delta^e\}^T [C]^T [N]^T [D] ([N] [C] \{\delta^e\} - 2 \{\epsilon^n\}) dV$$

L'énergie potentielle des forces superficielles $\{p\}$ prescrites a pour expression

$$P = \int_{C_s} \{\delta^e\}^T [C]^T [M(r,z)]^T \{p\} ds$$

V est le volume associé à l'élément triangulaire et C_s la surface latérale sur laquelle les forces $\{p\}$ sont appliquées.

En annulant les premières variations de $(U - P)$, on obtient les équations d'équilibre nodal de l'élément sous la forme (3.15) c.a.d

$$[K^e] \{\delta^e\} = \{F\} + \{Q\} \quad (3.21)$$

où $[K^e]$ et $\{Q\}$ conservent les expressions données en (3.16a) et (3.16c) à savoir

$$[K^e] = [C]^T [K^*] [C] \quad (3.22a)$$

$$\{Q\} = [C]^T \{Q^P\} \quad (3.22b)$$

tandis que

$$\{F\} = [C]^T \int_V [N]^T [D] \{\epsilon^n\} dV = [C]^T \{F^n\} \quad (3.22c)$$

Le calcul des coefficients apparaissant dans les matrices (3.22) est cette fois plus laborieux. étant donné que les matrices $[N]$ et

$[M]$ dépendent toutes deux des coordonnées. On obtient dans le cas présent

$$[K^*] = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \int_V \begin{bmatrix} \frac{n(1-\nu_2^2)}{r^2} & \frac{n(1+\nu_1)}{r} & \frac{z}{r^2} n(1-n\nu_2^2) & 0 & 0 & \frac{n\nu_2(1+\nu_1)}{r} \\ & 2n(1+\nu_1) & \frac{z}{r} n(1+\nu_1) & 0 & 0 & 2n\nu_2(1+\nu_1) \\ & & \frac{z}{r^2} n(1-n\nu_2^2) + \lambda & 0 & \lambda & \frac{z}{r} n\nu_2(1+\nu_1) \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{symétrique} & & & & \lambda & 0 \\ & & & & & 1-\nu_1^2 \end{bmatrix} dV \quad (3.23)$$

avec $\lambda = m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)$ et $dV = r dr dz$

$$\{F^n\} = \frac{E_2 \Delta}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \left\{ \begin{array}{l} n(\nu_1+n\nu_2^2) \varepsilon_r^n + n\nu_2(1+\nu_1) \varepsilon_z^n + n(1-n\nu_2^2) \varepsilon_\theta^n \\ R_g n(1+\nu_1) \varepsilon_r^n + 2n\nu_2(1+\nu_1) \varepsilon_z^n + n(1+\nu_1) \varepsilon_\theta^n \\ Z_g n(\nu_1+n\nu_2^2) \varepsilon_r^n + n\nu_2(1+\nu_1) \varepsilon_z^n + n(1-n\nu_2^2) \varepsilon_\theta^n + \lambda R_g \gamma_{rz}^n \\ 0 \\ \lambda R_g \gamma_{rz}^n \\ R_g n\nu_2(1+\nu_1) \varepsilon_r^n + (1-\nu_1^2) \varepsilon_z^n + n\nu_2(1+\nu_1) \varepsilon_\theta^n \end{array} \right\} \quad (3.24)$$

où $R_g = \frac{1}{3} (r_i + r_j + r_k)$ et $Z_g = \frac{1}{3} (z_i + z_j + z_k)$

$$\{Q^P\} = \int_{C_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \\ z & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & r \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} ds$$

Dans le cas d'une pression normale uniforme p appliquée entre les noeuds i et j de l'élément représenté à la figure 3, on a

$$p_r = -p \frac{dz}{ds'} \quad p_z = p \frac{dr}{ds'}$$

L'élément ayant une ouverture angulaire unitaire dans la direction azimutale :

$$ds = r ds'$$

si bien que

$$\{Q^P\} = p \int_i^j \begin{Bmatrix} -r dz \\ -r^2 dz \\ -r z dz \\ r dr \\ r^2 dr \\ r z dr \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Les valeurs des composantes γ_i ont été calculées par Greenbaum [7] et figurent dans l'appendice A. On trouvera dans ce même appendice les valeurs des diverses intégrales impliquées dans le calcul de la matrice $[K^*]$.

4. Assemblage et solution des équations structurales.

Les étapes consécutives à l'évaluation de la matrice de rigidité et des forces nodales propres à chaque élément discret consistent à construire et ensuite à résoudre le système traduisant l'équilibre

Ces caractéristiques de la matrice $[K]$ sont déterminantes pour la solution du système (4.1) à l'aide d'un ordinateur. Elles permettent, en effet, de ne mémoriser que les termes diagonaux et ceux d'une bande latérale. L'implantation dans les mémoires de l'ordinateur se fait sous forme d'une matrice rectangulaire, soit pour l'exemple cité selon le tableau :

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{22} & K_{33} & \dots & K_{2N-2,2N-2} & K_{2N-1,2N-1} & K_{2N,2N} \\
 K_{12} & K_{23} & K_{24} & \dots & K_{2N-2,2N-1} & K_{2N-1,2N} & 0 \\
 K_{13} & K_{24} & K_{35} & \dots & K_{2N-2,2N} & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

4.2 Méthode de résolution du système linéaire .

Il faut avant tout noter que dans un problème de fluage, le système (4.1) doit être résolu un très grand nombre de fois. On a toutefois l'avantage que seul le membre de droite évolue avec le temps, la matrice du système restant invariée.

Pour cette raison, la première méthode qui vient à l'esprit est celle de l'inversion de matrice. Malheureusement, la matrice inverse de $[K]$ n'est plus une matrice à bandes et on perd ainsi la caractéristique la plus intéressante.

Les méthodes itératives sont intéressantes mais requièrent de nombreuses opérations arithmétiques pour chaque résolution, ce qui allonge excessivement le temps de calcul.

La méthode de triangularisation de Gauss [7] apparait plus attrayante. Elle consiste à multiplier la matrice de départ $[K]$ par une matrice opportune $[L]$ de manière à obtenir une matrice triangulaire supérieure $[U]$.

Le système (4.1) se transforme dès lors en :

$$[U] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix} = [L] \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \vdots \\ F_{xN} \\ F_{yN} \end{pmatrix}$$

La matrice $[U]$ est encore à bandes et peut être mémorisée à la place de $[K]$, mais il faut en outre prévoir la mémorisation de $[L]$ qui servira pour transformer le membre de droite avant toute résolution.

Une autre technique applicable à notre problème est celle de Choleski. Elle consiste à décomposer la matrice originale sous forme du produit d'une matrice triangulaire supérieure $[S]$ par sa transposée, si bien que le système (4.1) se transforme en

$$[S]^T x [S] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \vdots \\ F_{xN} \\ F_{yN} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

avec l'avantage que le membre de droite n'est pas affecté par la transformation.

Si la matrice à décomposer est $[K(n,n)]$, les termes de $[S]$ sont fournis par les relations :

$$S_{11} = \sqrt{K_{11}} \quad ; \quad S_{1,j} = \frac{K_{1,j}}{S_{11}} \quad \text{pour } j = 2, n$$

$$S_{i,i} = \sqrt{K_{i,i} - \sum_{l=1}^{i-1} (S_{l,i})^2} \quad \text{pour } i = 2, n$$

$$S_{i,j} = \frac{K_{i,j} - \sum_{l=1}^{i-1} (S_{l,i} \times S_{l,j})}{S_{i,i}} \quad \begin{array}{l} \text{pour } i = 2, n-1 \\ j = i+1, n \end{array}$$

$$S_{i,j} = 0 \quad \text{pour } i = 2, n \quad ; \quad j = 1, n-1$$

L'expression (4.3) montre qu'on devra résoudre deux systèmes à savoir

$$[S] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N \\ Y_N \end{pmatrix}$$

$$[S]^T \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_N \\ Y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{xN} \\ F_{yN} \end{pmatrix}$$

Comparée à la méthode de Gauss, celle de Choleski semble requérir un nombre double d'opérations pour chaque résolution. Ce n'est toutefois qu'une apparence, car la méthode de Gauss rend nécessaire la multiplication du membre de droite par la matrice $[L]$ lors de chaque résolution.

En outre, la méthode de Choleski ne requiert que la mémorisation de la matrice $[S]$ qui est à bandes comme la matrice de départ. Cette propriété a été déterminante dans le choix de la méthode de Choleski pour notre code digital.

4.3 Les conditions aux limites et le conditionnement de la matrice.

4.3 1 : Les conditions aux limites sur les déplacements.

On associe à chaque point nodal de la structure un indice NTYPE destiné à indiquer si le noeud en question a des conditions imposées sur les composantes de son déplacement. Les valeurs attribuées à l'indice NTYPE spécifient le type de condition sur le déplacement comme l'indique le tableau suivant :

NTYPE	0	1	2	3	4	5	6
Condition	aucune	$u = 0$	$v = \alpha u$	$v=0$	$u = \bar{u}$	u fixé	v fixé

La condition $u = \bar{u}$ indique que le noeud appartient à un côté vertical dont le déplacement horizontal est uniforme et sur lequel la résultante horizontale des forces est imposée.

Dans certains cas, un point nodal peut avoir des spécifications sur les deux composantes de son déplacement. L'indice NTYPE est construit dans ce cas par les deux indices correspondant à chacune des conditions.

Les conditions doubles qu'on obtient par combinaison des conditions simples sont au nombre de 15. Parmi elles, quatre sont physiquement irréalisables, tandis que, par transformations opportunes, les autres se réduisent à sept :

NTYPE	13	16	24	43	46	53	56
Conditions	$u = 0$ $v = 0$	$u = 0$ v fixé	$u = \bar{u}$ $v = \alpha u$	$u = \bar{u}$ $v = 0$	$u = \bar{u}$ v fixé	u fixé $v = 0$	u fixé v fixé

4. 3 2 Le conditionnement de la matrice.

En vue de satisfaire aux conditions de contour relatives aux

déplacements qui, dans le principe de variation (2.6) , sont des conditions "à priori" , il faut conditionner la matrice $[K]$ de manière opportune. Cette opération est effectuée à l'aide d'artifices particuliers visant à conserver la symétrie de la matrice et à ne pas augmenter sa largeur de bande.

Les conditions aux limites envisagées sont :

a) u ou $v = 0$

On supprime dans la matrice $[K]$ la ligne et la colonne correspondant au coefficient diagonal du déplacement considéré. On élimine également dans le membre de droite le terme correspondant à la ligne supprimée.

b) Relation linéaire entre u et v .

Lorsqu'un noeud se trouve sur un axe de symétrie, le déplacement se fait selon cet axe, ce qui impose que

$$v = \alpha u$$

où α est la tangente de l'angle que fait l'axe de symétrie avec l'axe coordonné Ox .

En présence de cette condition, on commence par modifier la matrice en ajoutant à chaque terme de la ligne contenant le coefficient diagonal relatif à u le terme correspondant de la ligne relative à v multiplié par α . On procède de manière analogue pour les deux membres de droite intéressés.

Etant donné la relation entre u et v , on peut considérer ce dernier comme une inconnue fictive. Dans ce cas, on ajoutera aux termes de

la colonne relative à u les termes de la colonne de v multipliés par α .
On supprimera ensuite la colonne relative à v ainsi que la ligne correspondant au terme diagonal de v .

c) u ou v est imposé.

Dans la matrice $[K]$ on supprime la ligne et la colonne correspondant au coefficient diagonal du déplacement considéré. Dans le membre de droite, on supprime le terme correspondant à la ligne de u ou v ; on soustrait , en outre, du membre de droite des équations contenant u ou v le produit du déplacement connu par son coefficient de rigidité.

d) Noeuds d'un côté vertical où u est uniforme et où la résultante des forces horizontales est imposée.

Lorsqu'on limite l'analyse des contraintes à la portion symétrique d'une structure "infinie" , on se trouve fréquemment en présence d'un côté vertical sur lequel la résultante des efforts horizontaux est imposée pour des raisons d'équilibre global , tandis que le déplacement horizontal u est uniforme.

Dans ce cas, la matrice $[K]$ est conditionnée comme pour un déplacement u imposé, en attribuant au déplacement uniforme une valeur de première approximation. Après résolution du système régissant les déplacements, les forces nodales obtenues aux noeuds du côté vertical n'équilibreront généralement pas la résultante horizontale imposée. Toutefois, comme la valeur de cette résultante est une fonction linéaire du déplacement uniforme du côté vertical, la

méthode des tangentes de Newton fournira en une seule itération la valeur à donner au déplacement uniforme pour équilibrer la résultante imposée. On trouvera dans l'appendice B la formulation mathématique relative à cette condition de déplacement.

Il vaut la peine de faire remarquer que pour les divers types de conditions imposées aux composantes du déplacement, la matrice $[K]$ est réduite d'une ligne. Dans certains cas, on peut même obtenir une réduction de sa largeur de bande. Ces résultats conduisent à un gain de temps, aussi bien en ce qui concerne la décomposition de la matrice que pour la résolution du système linéaire.

5. Evaluation des contraintes et des déformations.

En état plan, les déformations totales dans la section droite sont fournies par la relation (3.7) en fonction des déplacements nodaux. Ces grandeurs sont constantes à l'intérieur de chaque élément discret. La déformation axiale totale est donnée par la relation (3.12) et a la même valeur pour tous les éléments.

Les composantes de la contrainte résultent des relations (3.9) et (3.10). Comme la dilatation axiale totale est fonction des contraintes agissant à l'intérieur des divers éléments de la structure et qu'à leur tour ces dernières dépendent de ϵ_z^t , un processus itératif doit être mis en oeuvre. On commence par attribuer une valeur approchée à ϵ_z^t . Ceci permet de calculer les diverses contraintes et ensuite d'obtenir

une meilleure approximation de la dilatation axiale à l'aide de (3.12).

Le processus itératif se prolonge jusqu'à ce que l'erreur relative sur

ϵ_z^t entre deux itérations successives devienne inférieure à une petite quantité donnée.

En cas de symétrie axiale, les déformations totales s'expriment en fonction des déplacements nodaux à l'aide des égalités (3.19). Ces relations fournissent une déformation circonférentielle variable à l'intérieur d'un élément. En vue de simplifier les choses, une valeur moyenne définie par

$$\epsilon_{\theta}^t = \frac{u_i + u_j + u_k}{R_g}$$

est utilisée pour le calcul des contraintes à l'aide des équations (3.20).

Les contraintes et déformations aux noeuds de la structure peuvent être évaluées à l'aide de moyennes pondérées de ces mêmes valeurs dans les éléments adjacents au noeud considéré :

$$\sigma_{\text{nodal}} = \frac{\sum \sigma_e \Delta_e}{\sum \Delta_e}$$

6. Calcul des déformations initiales.

On a montré au paragraphe 2 que la déformation totale à l'intérieur

de tout élément discret peut être considérée comme la somme

$$\{\varepsilon^t\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^{th}\} + \{\varepsilon^w\} + \{\varepsilon^c\}$$

d'une déformation élastique, d'une dilatation thermique et de déformations dues aux variations de dimension ainsi qu'au fluage.

Les trois dernières composantes de la déformation totale forment une déformation initiale supposée connue dont on rend compte dans le formalisme aux éléments finis à l'aide de forces nodales statiquement équivalentes. Cette déformation initiale est évaluée en lui attribuant une valeur moyenne constante à l'intérieur de chaque élément discret .

Cette hypothèse est consistante avec la condition de déformation constante imposée par le choix de fonctions de déplacement linéaires.

6.1 Les dilatations thermiques.

Le réseau d'éléments finis utilisé dans le problème aux contraintes permet au code digital TAFE- 2 [4] de déterminer les valeurs de la température aux divers points nodaux de la structure.

On attribuera à chaque élément discret une température moyenne

$$T^e = \frac{T_i + T_j + T_k}{3} \quad (6.1)$$

égale à la moyenne arithmétique des températures aux trois sommets.

En désignant par α_1 le coefficient de dilatation thermique

dans le plan d'isotropie et par α_2 sa valeur dans la direction perpendiculaire, la dilatation thermique propre à chaque élément s'écrit :

$$\{\varepsilon^{th}\}^T = (\varepsilon_x^{th}, \varepsilon_y^{th}, \gamma_{xy}^{th}, \varepsilon_z^{th}) = T^e (\alpha_1, \alpha_1, 0, \alpha_2)$$

pour l'état plan (6.2a)

$$\{\varepsilon^{th}\}^T = (\varepsilon_r^{th}, \varepsilon_z^{th}, \varepsilon_\theta^{th}, \gamma_{rz}^{th}) = T^e (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, 0)$$

en symétrie axiale (6.2b)

6.2 Les variations de dimension sous irradiation.

Habituellement, les variations de dimension sont dues à l'irradiation du matériau dans un flux de neutrons rapides et dépendent de la dose rapide intégrée ainsi que de la température. Elles se présentent notamment dans le cas du graphite [8].

Cette déformation présente les mêmes composantes que la dilatation thermique. On les calcule en attribuant à chaque élément une température moyenne constante, tandis que la dose rapide intégrée peut en général être supposée constante pour tous les éléments discrets.

Il n'y aurait toutefois aucune difficulté à tenir compte des variations spatiales du flux de neutrons rapides.

6.3 Les déformations de fluage.

Les lois de fluage en état multiaxial de contrainte peuvent être déterminées sur la base des hypothèses suivantes [9] :

- a) la déformation de fluage se produit sans variation de volume.
- b) les taux de déformation principale de glissement sont proportionnels aux contraintes principales de cisaillement.
- c) la direction des déformations normales principales coïncide avec celle des contraintes normales associées.

Dans ces conditions, les relations entre taux de déformation et contrainte s'écrivent pour l'état plan :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{xc} &= \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) \\ \dot{\varepsilon}_{yc} &= \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} (2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x) \\ \dot{\varepsilon}_{zc} &= \frac{\dot{\varepsilon}_e}{2\sigma_e} (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \\ \dot{\gamma}_{xyc} &= \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_e}{\sigma_e} \tau_{xy}\end{aligned}\tag{6.3}$$

où les quantités σ_e et ε_e sont définies par les relations

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2}$$

$$\varepsilon_e = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y)^2 + (\dot{\varepsilon}_y - \dot{\varepsilon}_z)^2 + (\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x)^2 + \frac{3}{2} \dot{\gamma}_{xy}^2}$$

(6.4)

et dérivent de la notion de contrainte et déformation octaédrales.

Pour déterminer les déformations de fluage (6.3) en fonction de l'état de contrainte, il est nécessaire de définir l'équation d'état du matériau. Cette équation relie le taux de déformation de comparaison à la contrainte et à la déformation de comparaison ainsi qu'à la température et au temps :

$$\frac{d \varepsilon_e}{d t} = f(\sigma_e, \varepsilon_e, T, t) \quad (6.5)$$

On détermine la forme de l'équation (6.5) par un essai de traction uniaxiale pour lequel les relations (6.4) donnent $\dot{\varepsilon}_e = \dot{\varepsilon}_1$ et

$$\sigma_e = \sigma_1 .$$

Il faut noter que la dérivation donnée dans ce paragraphe des lois multiaxiales de fluage suppose implicitement que le matériau est isotrope. Dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, il est nécessaire

d'introduire des constantes de viscosité dans l'expression de la contrainte de comparaison. Ces constantes sont déterminées par des essais de traction selon les axes principaux d'anisotropie. On trouvera dans la référence [9] la procédure permettant d'établir les lois de fluage multiaxial dans ces conditions.

Le code de calcul GOLIA a été conçu de manière à pouvoir y introduire des lois de fluage tout à fait générales.

7 Les étapes de la procédure de calcul.

Comme indiqué au paragraphe 2.4 , la solution d'un problème impliquant le fluage est obtenue par découpage de l'axe du temps.

Les étapes de la procédure de calcul sont les suivantes :

- A) A l'instant initial, seules interviennent les dilatations thermiques si bien que le membre de droite des équations d'équilibre nodal (4.1) :

$$[K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \vdots \\ F_{xN} \\ F_{yN} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ \vdots \\ Q_{xN} \\ Q_{yN} \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

est immédiatement déterminé. Rappelons que $\{F\}$ représente les forces nodales dues aux dilatations thermiques, aux variations de dimension et au fluage , tandis que $\{Q\}$ rend compte des forces de surfaces prescrites.

La solution du système (7.1) fournit les déplacements élastiques. On en déduit les déformations et contraintes élastiques à l'aide des relations (3.19) et (3.20) en symétrie axiale et à l'aide de relations analogues en état plan.

B) En admettant que les contraintes élastiques restent constantes pendant un petit intervalle de temps, on peut calculer les déformations de fluage accumulées dans chaque élément discret. Les variations de dimension sont ensuite évaluées comme fonctions du temps et de la température. Le membre de droite du système (7.1) peut ainsi être ajusté et en résolvant un nouveau problème élastique, on obtiendra les contraintes et les déformations à la fin du premier intervalle de temps.

C) On procède de manière analogue pour le second intervalle et les intervalles successifs en admettant que chaque élément discret flue sous l'effet d'une contrainte moyenne constante tout au long de l'intervalle **considéré**. Cette contrainte est obtenue en supposant une variation linéaire de la contrainte pendant l'intervalle de temps immédiatement précédent et en extrapolant la droite ainsi obtenue jusqu'à mi-longueur de l'intervalle nouveau considéré. Cette procédure permet de prévoir l'effet des variations de dimension sur la relaxation des contraintes sans devoir itérer à l'intérieur de chaque intervalle de temps. L'erreur introduite par ce procédé peut être rendue aussi faible que l'on veut en réduisant la longueur des intervalles.

Dans le code GOLIA, la longueur des divers intervalles est calculée

automatiquement de manière à rendre la vitesse de progression dans le temps aussi élevée que possible tout en empêchant à l'aide de critères appropriés que la solution diverge.

8. Le code digital GOLIA.

8.1 Description générale et organigramme succinct.

Le code digital GOLIA a été écrit en Fortran IV et compilé sur l'ordinateur IBM 360/65 du CETIS à Ispra. Il permet d'aborder à l'aide de la méthode décrite dans les paragraphes précédents l'analyse numérique des contraintes et déformations dans des structures planes ou à symétrie axiale en présence de fluage, de variations de dimension dues à l'irradiation et d'un champ de température.

La structure idéalisée peut comporter au maximum 700 éléments triangulaires, 400 points nodaux et 20 points à travers l'épaisseur. Cette dernière restriction est destinée à limiter la largeur de bande de la matrice de rigidité globale. Dans ces conditions, le programme peut être contenu dans la mémoire centrale de l'ordinateur sans devoir recourir à des mémoires auxiliaires.

Un organigramme succinct du programme est présenté à la figure 5 . Le programme comprend une partie principale et dix sous-programmes. Le programme principal est constitué de trois parties : la lecture des données du problème, le déroulement du calcul proprement dit exécuté en faisant appel aux divers sous-programmes et finalement l'impression des résultats .

Il faut noter que la partie "manuelle" de la phase de préparation des données est extrêmement réduite par le fait que toutes les données relatives au réseau d'éléments finis sont élaborées automatiquement par un programme approprié [5] .

Nous ne décrivons dans ce rapport ni la préparation des données d'entrée du code, ni la présentation des résultats. Ces questions feront l'objet d'un rapport séparé comportant, en outre, le mode d'emploi du code TAFE-2.

8.2 Problèmes illustratifs.

En vue de contrôler la validité des résultats numériques obtenus à l'aide du code GOLIA , nous avons résolu un certain nombre de problèmes dont la solution a été repérée dans la littérature.

8.2.1 Fluage d'un cylindre épais soumis à une pression interne.

Nous avons repris le problème du fluage d'un tube épais fermé à ses extrémités et soumis à une pression interne traité dans la référence [10] .

Ce problème illustre l'état plan généralisé de déformation où la déformation axiale est constante sur l'épaisseur du tube. Sa valeur est déterminée par la condition d'équilibre axial :

$$\int_a^b \sigma_z r dr = \frac{p_i a^2}{2}$$

où $p_i = 7300$ psi ; $a = 1$ inch ; $b = 4$ inches.

La loi de fluage du matériau est donnée par la relation

$$\frac{d \epsilon_e}{dt} = B \sigma_e^N \epsilon_e^{-M}$$

où $B = 3,49 \cdot 10^{-25}$; $N = 3,41$; $M = 1,445$

Les constantes élastiques valent

$$E = 14,1 \cdot 10^6 \text{ psi} \quad \nu = 1/3$$

Le champ de déplacement étant purement radial, nous avons limité l'analyse à une portion de cylindre d'ouverture égale à 5° .

Nous avons recherché l'évolution des contraintes dans le temps jusqu'à atteindre 10^6 heures. La figure 6 montre l'évolution de la contrainte circonférentielle à la surface interne du cylindre. Par comparaison avec les résultats donnés en [10], on constate que la convergence de la solution est très bonne. Les figures 7a, 7b, 7c illustrent la répartition des contraintes sur l'épaisseur du tube à $t = 0$, 128 hr et 10^6 heures. Ici également, la confrontation avec les résultats de la référence est très satisfaisante.

8.2.2 Fluage, variations de dimension et champ de température dans un cylindre creux en graphite.

Nous avons recherché l'évolution en fonction de la dose intégrée en neutrons rapides des contraintes et déformations dans un cylindre creux en graphite, en utilisant les données de la référence [8] où ce problème est traité.

Le cylindre est supposé en état plan généralisé de déformation ($\epsilon_z = \text{Cte}$) ; le calcul est effectué en tenant compte du fluage primaire et secondaire ainsi que des variations de dimension . Ces dernières sont fonctions de la température locale et de la dose rapide intégrée moyennée sur l'élément.

Etant donné qu'une erreur s'est glissée dans la publication de référence en ce qui concerne la valeur de la constante de fluage secondaire du graphite, nous avons attribué à cette grandeur la valeur :

$$K = 2 \times 10^{-27} (\text{psi})^{-1} (\text{cm}^2/\text{neut})$$

De ce fait, une confrontation précise entre nos résultats et ceux de la référence [8] s'est avérée impossible. L'inspection des figures 8a, 8b et 8c montre toutefois que les résultats fournis par le code GOLIA correspondent très bien à ceux de la référence.

8.2.3 Plaque perforée tendue uniformément.

Cet exemple est traité dans la référence [11] . Il s'agit, comme le montre la figure 9, d'une plaque perforée tendue uniformément. Loin des bords de la plaque, le champ de contrainte est certainement répétitif, cette hypothèse permet de limiter l'analyse au secteur symétrique représenté à la figure 9.

Ce problème de contrainte plane fait apparaître sur le côté BD une condition de déplacement horizontal uniforme, tandis que la résultante horizontale P est imposée par les conditions d'équilibre global de la plaque.

Les figures 10a et 10b permettent de comparer les résultats obtenus à ceux de la référence.

8.2.4 Cylindre épais avec pression interne traité en symétrie axiale.

Il restait, après les problèmes de contrainte et déformation planes à contrôler le fonctionnement du code GOLIA en symétrie axiale.

A cet effet, nous avons traité le problème d'un cylindre épais soumis à une pression interne. Cette fois, la structure est discrétisée dans le plan r,z.

Les caractéristiques mécaniques ont pour valeur :

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ psi} ; \quad \nu = 1/3$$

La loi de fluage du matériau répond à l'équation :

$$\varepsilon_e^c = 6,4 \cdot 10^{-18} \sigma_e^{4,4} t$$

La figure 11 montre la distribution radiale de la contrainte circonférentielle en régime élastique et en fluage établi. Cette dernière répartition est comparée aux résultats de la référence [7] .

9. Conclusions.

La méthode de calcul présentée dans ce rapport et appliquée numériquement dans le code GOLIA permet l'étude du comportement mécanique de structures planes ou à symétrie axiale.

Par le fait qu'elle permet de tenir compte de l'anisotropie du matériau, du fluage, du champ de température et des variations de dimension sous irradiation, la méthode apparaît comme bien adaptée à l'étude d'un grand nombre de structures à géométrie complexe rencontrées dans le domaine de la technologie nucléaire.

On songe particulièrement, mais non exclusivement, aux éléments de combustible et aux composants en graphite.

Une étape reste à franchir pour perfectionner le travail accompli dans le cadre de ce rapport. Elle consiste à coupler les codes GOLIA et TAFE - 2 . De cette façon, on pourra aborder le problème important des interactions entre la mécanique et la thermique tout au long de la vie d'un élément de combustible.

Remerciements.

Nous exprimons notre gratitude à notre collègue Mr J. Dejace .
Nous lui devons la mise au point et l'écriture des sous-programmes permettant la mise en oeuvre de la méthode de Choleski .

Bibliographie.

- (1) O. C. Zienkiewicz : The Finite Element Method in structural and continuum mechanics. Mc Graw-Hill (1967) .
- (2) J. Donéa, S. Giuliani : Calcul numérique des contraintes mécaniques et thermiques dans un cylindre creux de section droite irrégulière. EUR 4181 f (1968) .
- (3) J. Donéa : Finite Element Analysis of radiation-damage stresses in the graphite of matrix fuel-elements. EUR 4472 e (1970) .
- (4) J. Donéa, M. Hogge : TAFE - 2 , Finite Element Code for Temperature Analysis in plane and axi-symmetric structures. Euratom , C.C.R. Ispra.
- (5) J. Reynen : Communication privée, Euratom C.C.R. Ispra.
- (6) B. Fraeijs de Veubeke : Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method. (Chap. 9 of "Stress Analysis" , Ed. O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister , Wiley 1965) .
- (7) G. A. Greenbaum : Creep Analysis of Axisymmetric Bodies . University of California, Los Angeles, Ph. D dissertation, 1966.
- (8) S. J. Chang, C. E. Pugh, S. E. Moore : Viscoelastic analysis of graphite under neutron irradiation and temperature distribution. ORNL - TM - 2407 , October 1969.
- (9) I. Finnie, W. R. Heller : Creep of engineering materials. Mc Graw-Hill , 1959 .

- (10) J. P. Yalch, J. E. Mc Connelee : Plane strain creep and plastic deformation analysis of a composite tube.
Nuclear Engineering and Design 5 (1967) 52-62 .
- (11) T. Slot, J. P. Yalch : Stress Analysis of plane perforated structures by point-wise matching of boundary conditions .
Nuclear Engineering and Design 4 (1966) 163-176 .

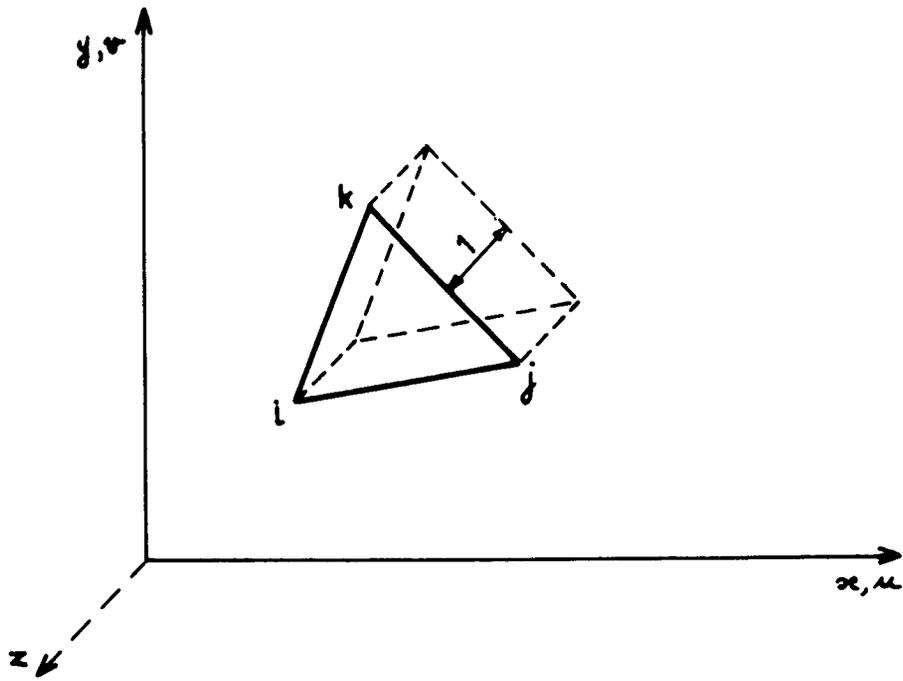


Fig.1: Élément triangulaire de référence pour les états plans

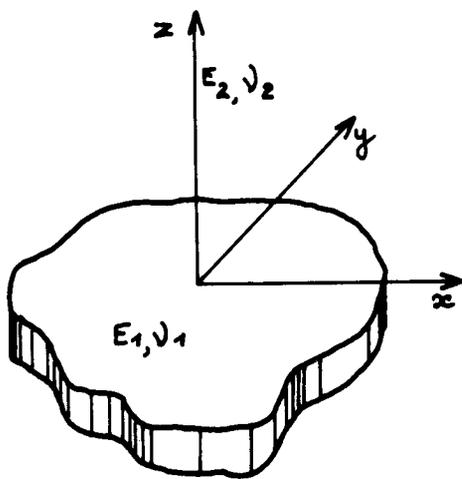


Fig 2a : Isotropie transversale
(état plan)

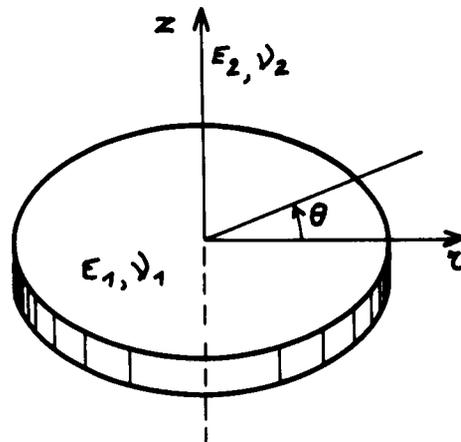


Fig 2b : Plan d'isotropie normal
à l'axe de symétrie

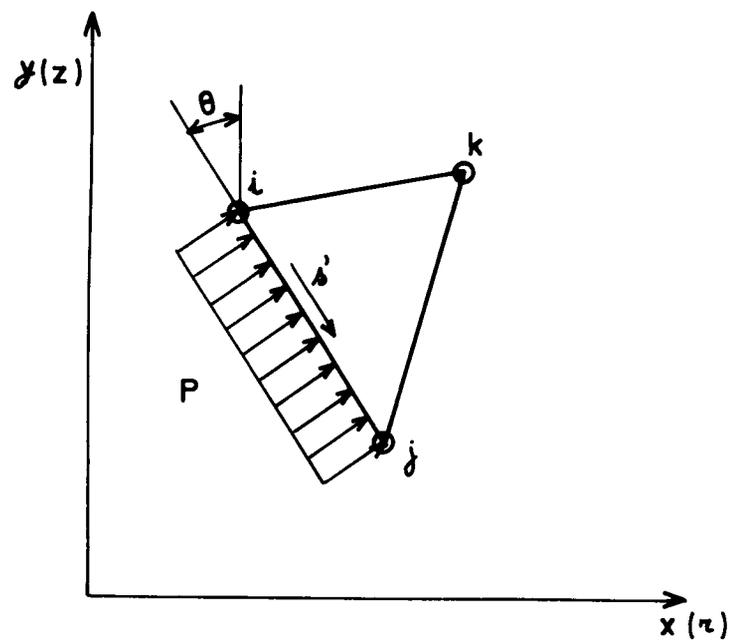


Fig. 3. Pression normale uniforme

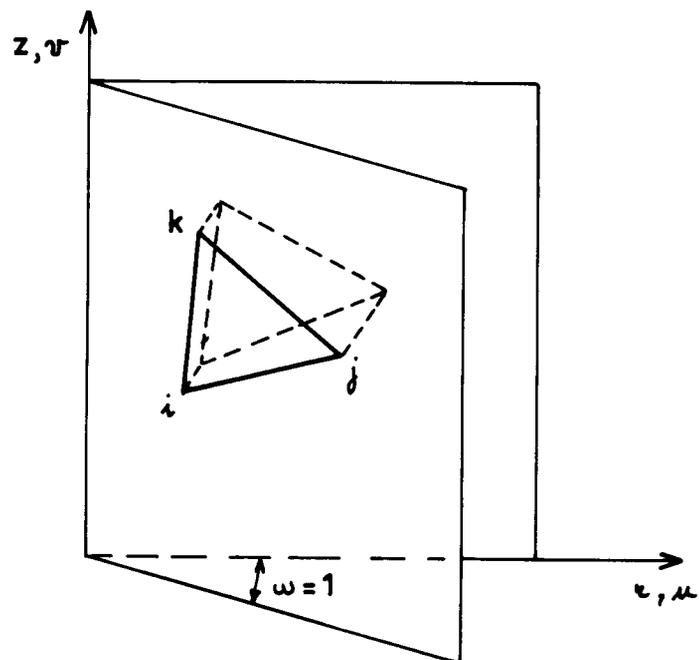


Fig. 4 . Elément triangulaire de référence pour les structures à symétrie axiale

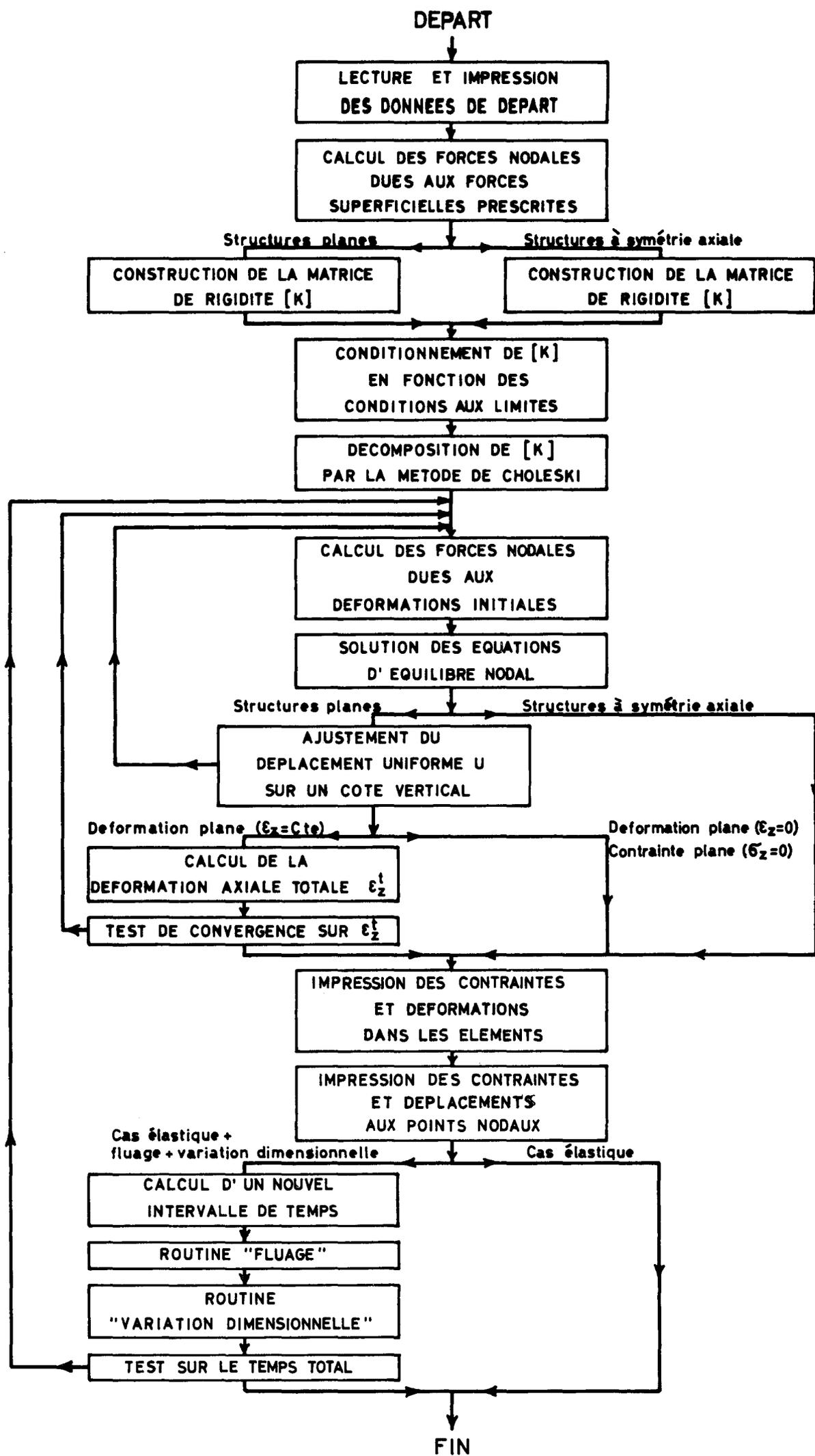


Fig. 5 Organigramme général du code "Golia"

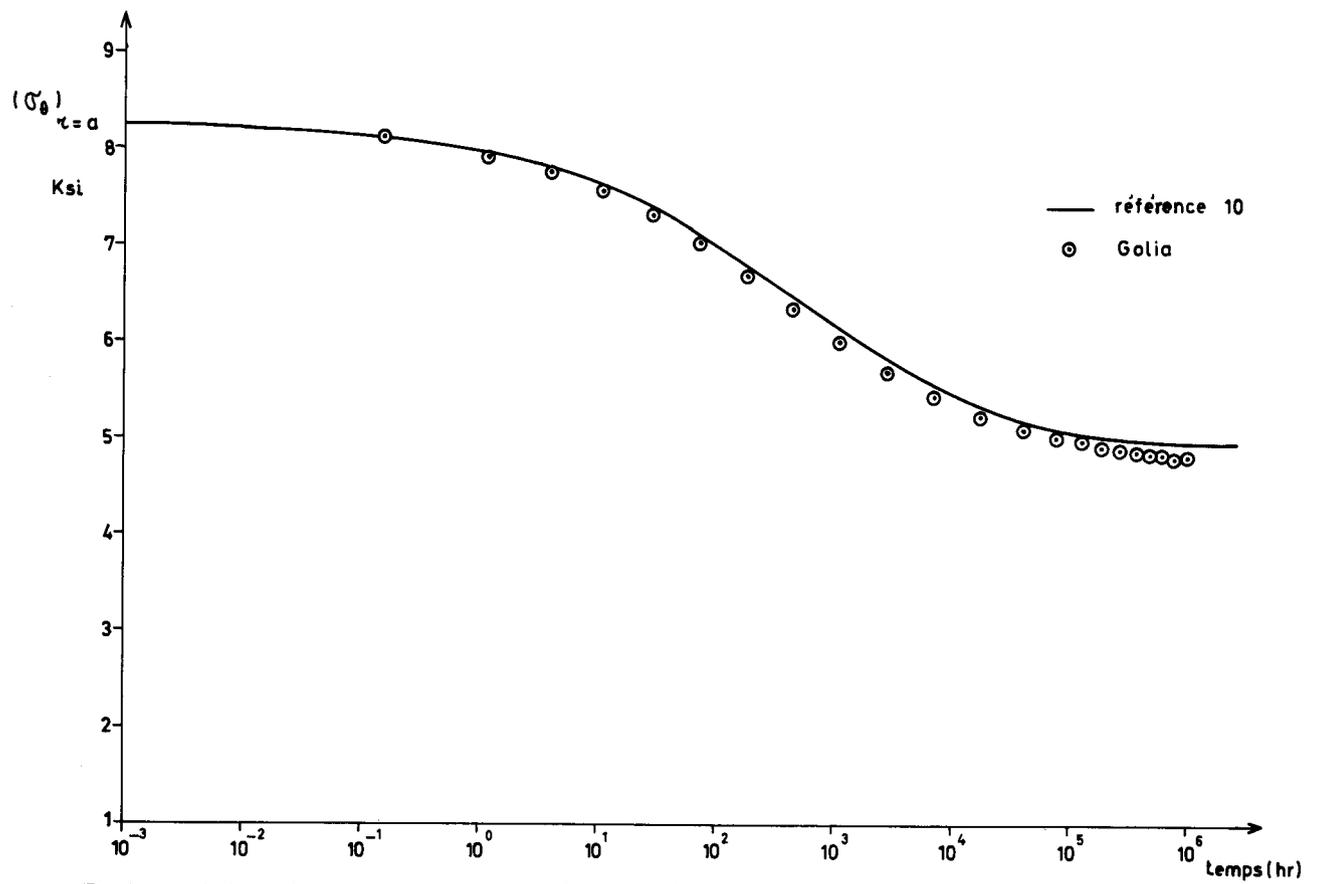


Fig.6 : Variations de la contrainte circonférentielle à la surface interne en fonction du temps.

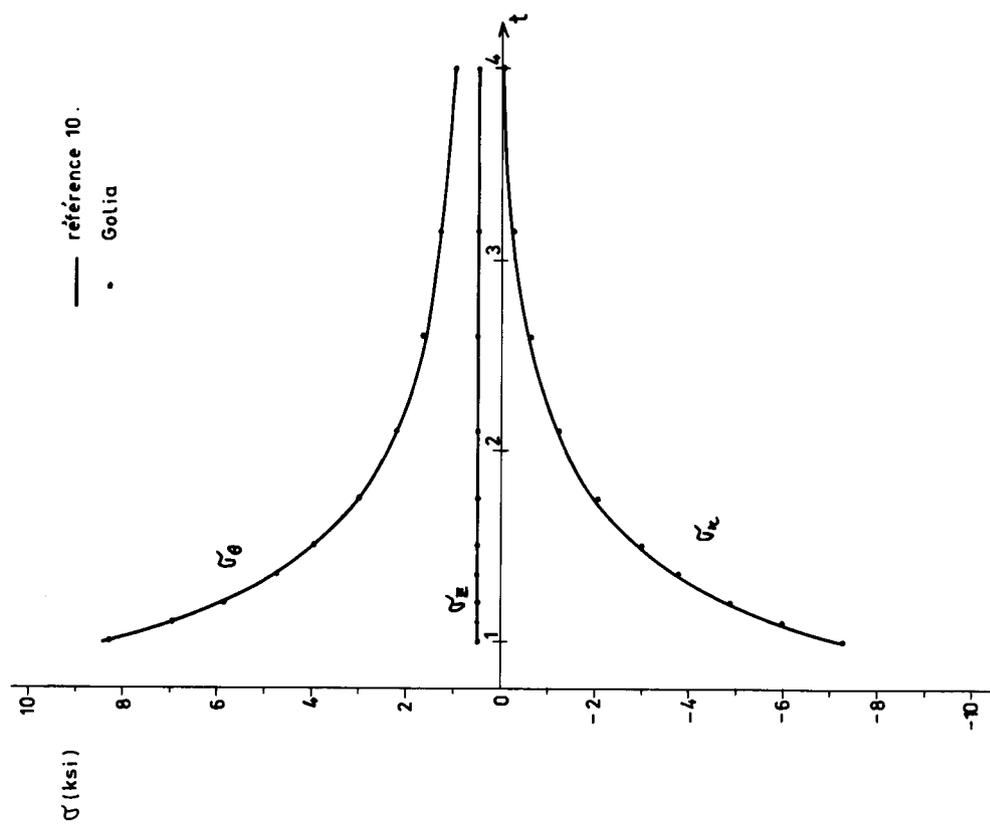


Fig 7a. Distribution radiale des contraintes à $t=0$.

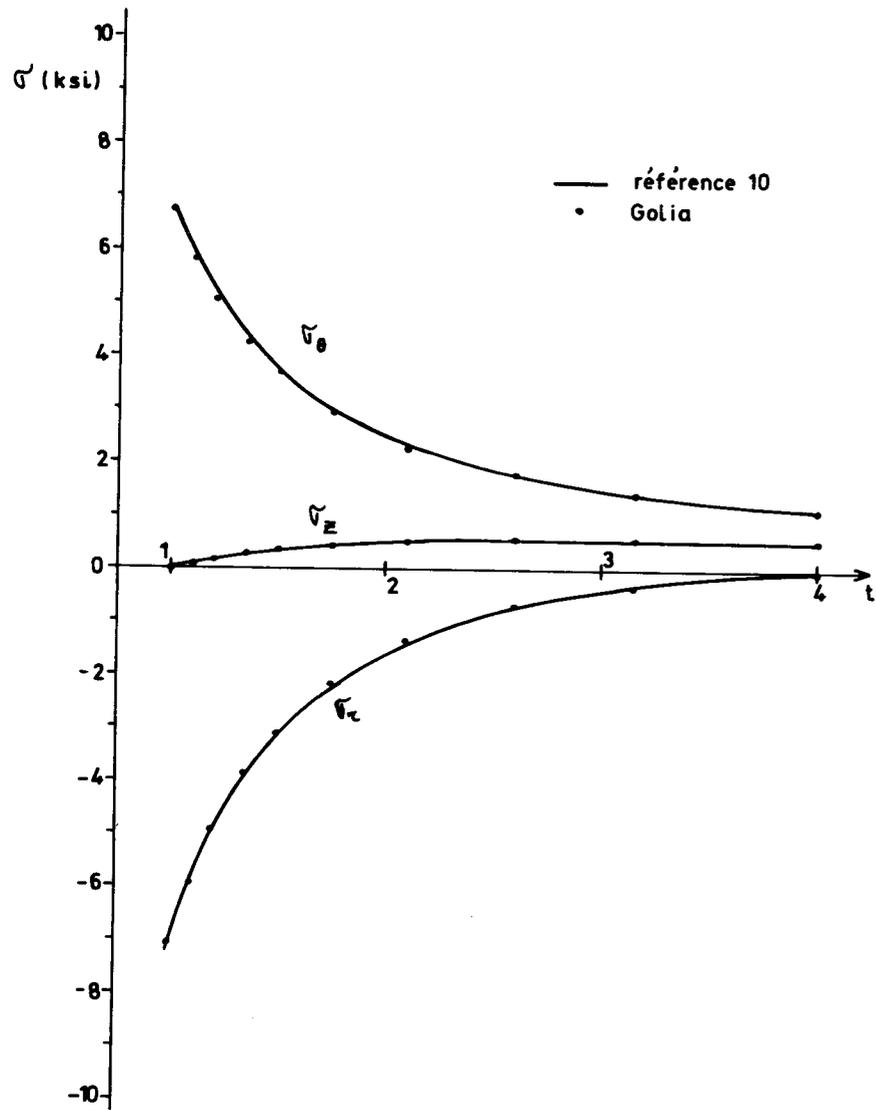


Fig. 7b. Distribution radiale des contraintes à $t = 128$ hr.

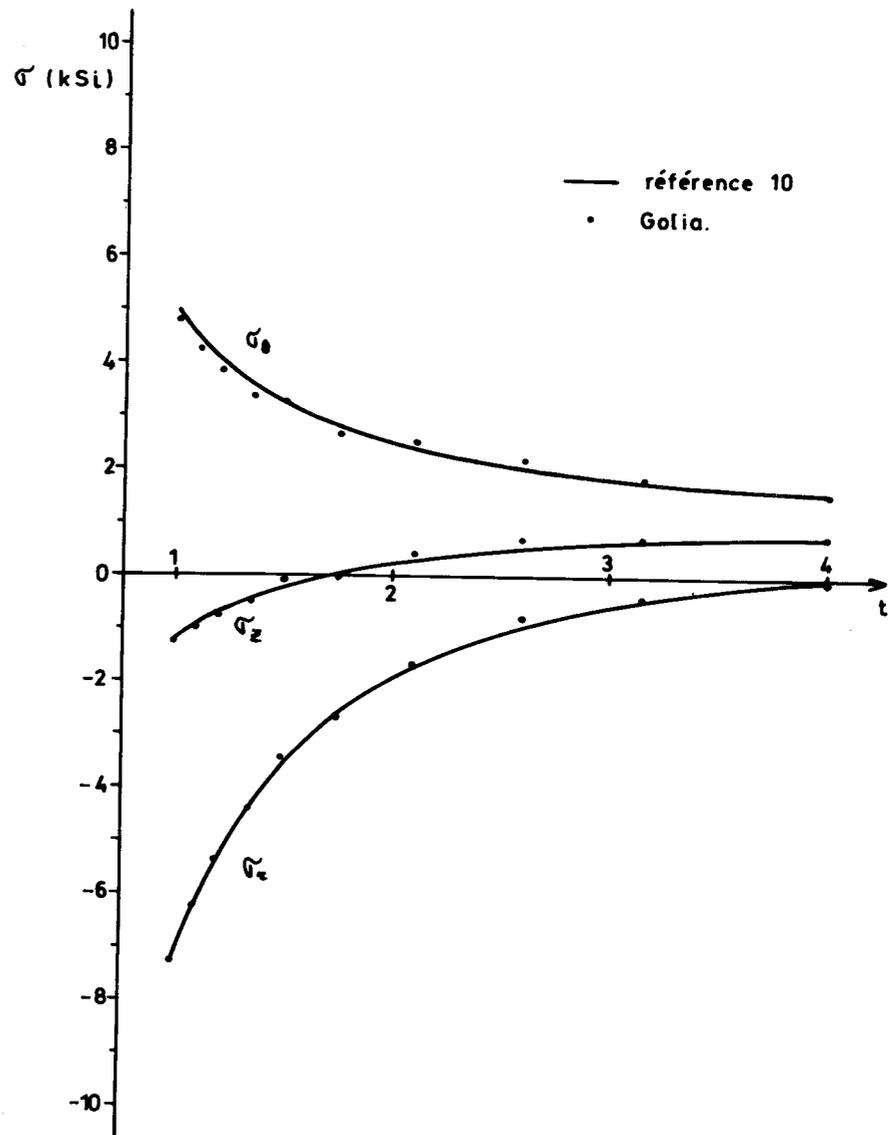


Fig 7c. Distribution radiale des contraintes à $t = 10^6$ hr.

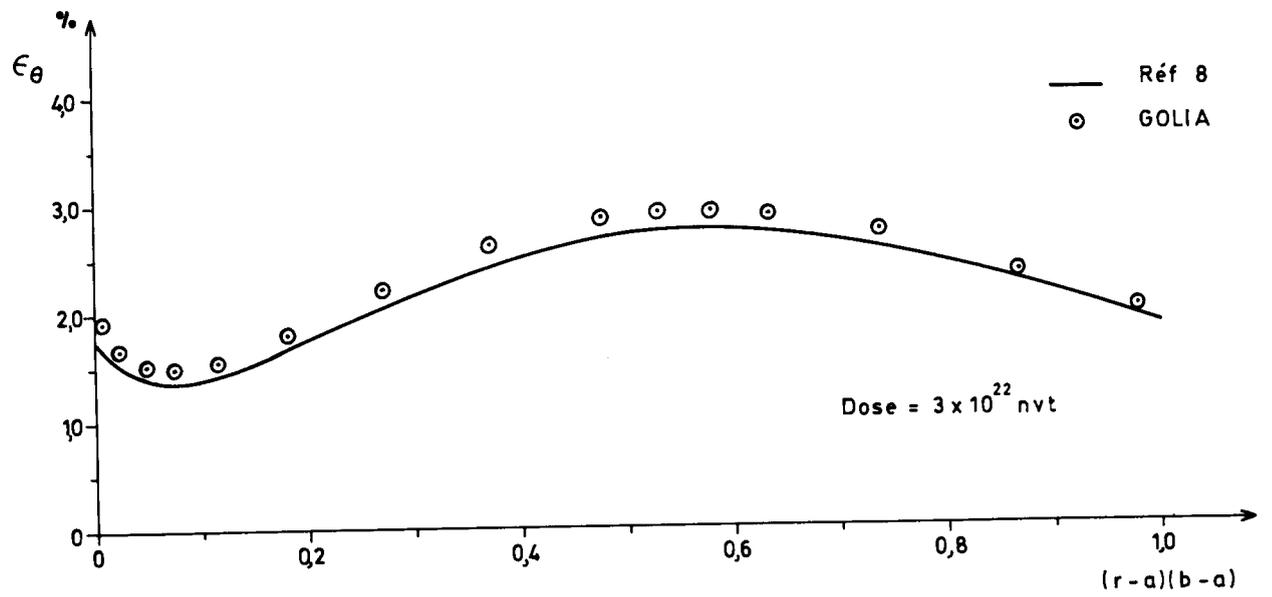


Fig. 8a : Distribution radiale de la déformation circonférentielle

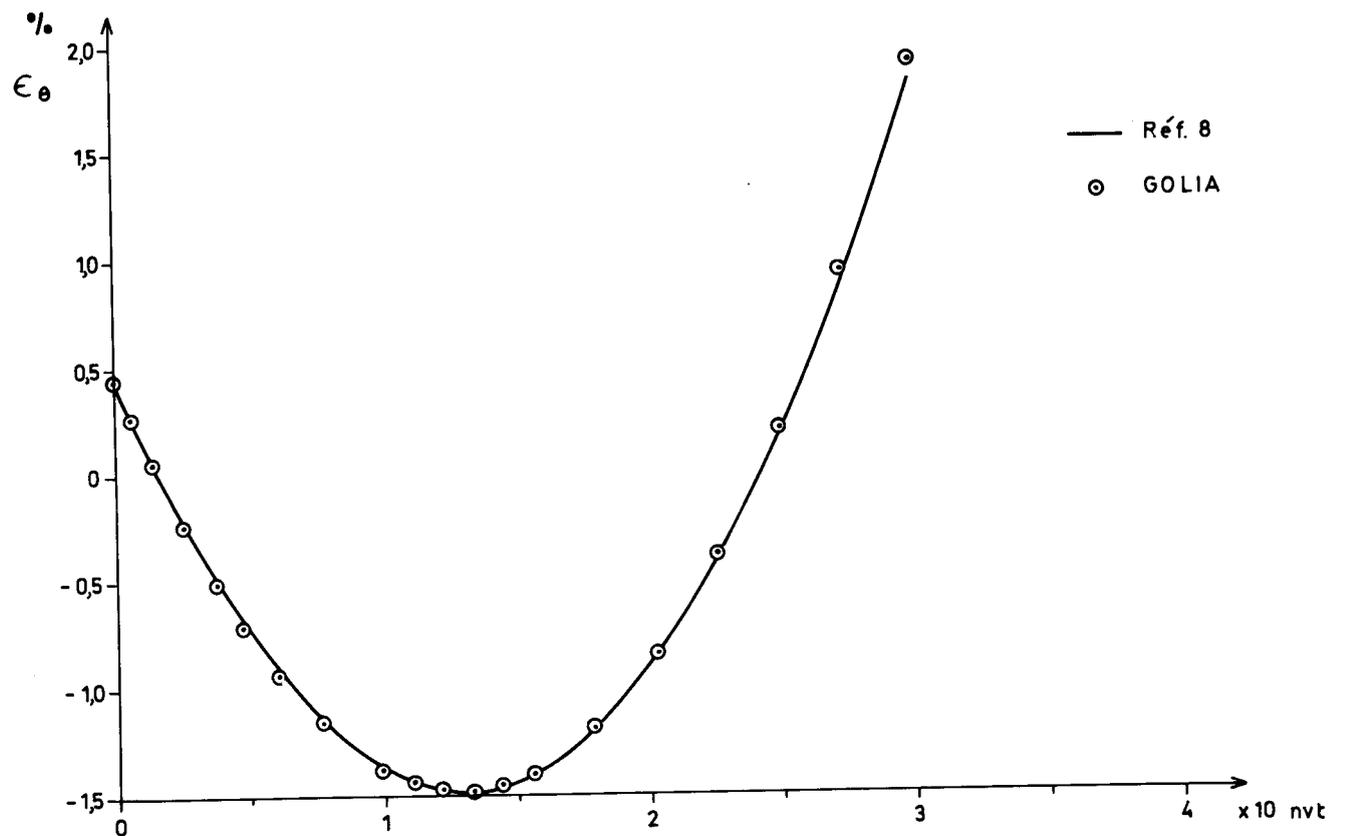


Fig. 8b : Déformation circonférentielle à la surface externe en fonction de la dose intégrée.

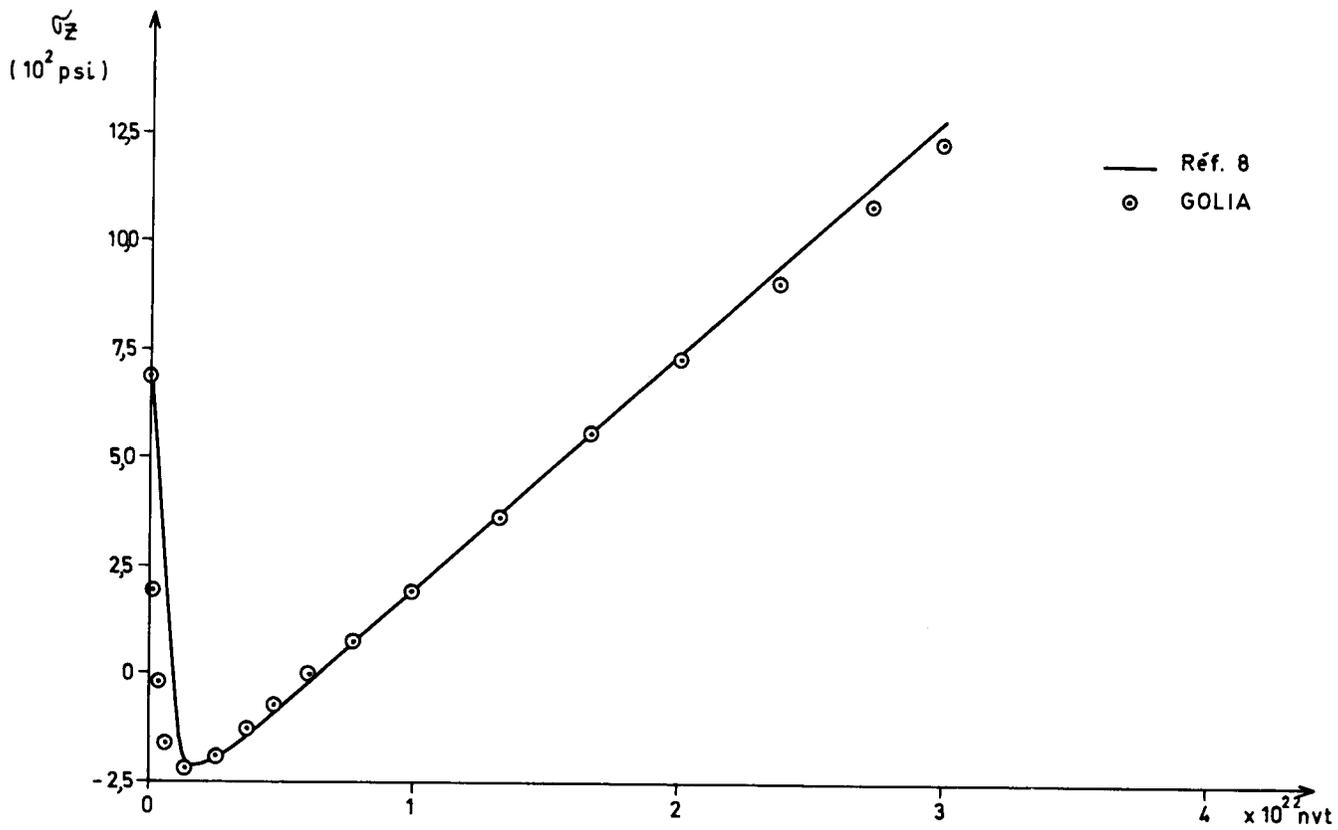


Fig. 8c : Contrainte axiale à la surface externe en fonction de la dose intégrée.

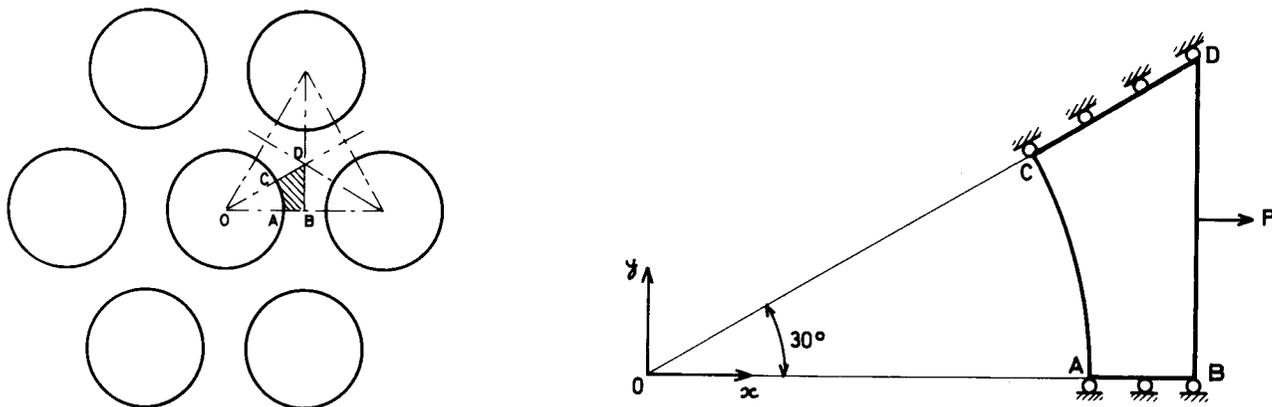


Fig. 9 : Plaque perforée tendue uniformément

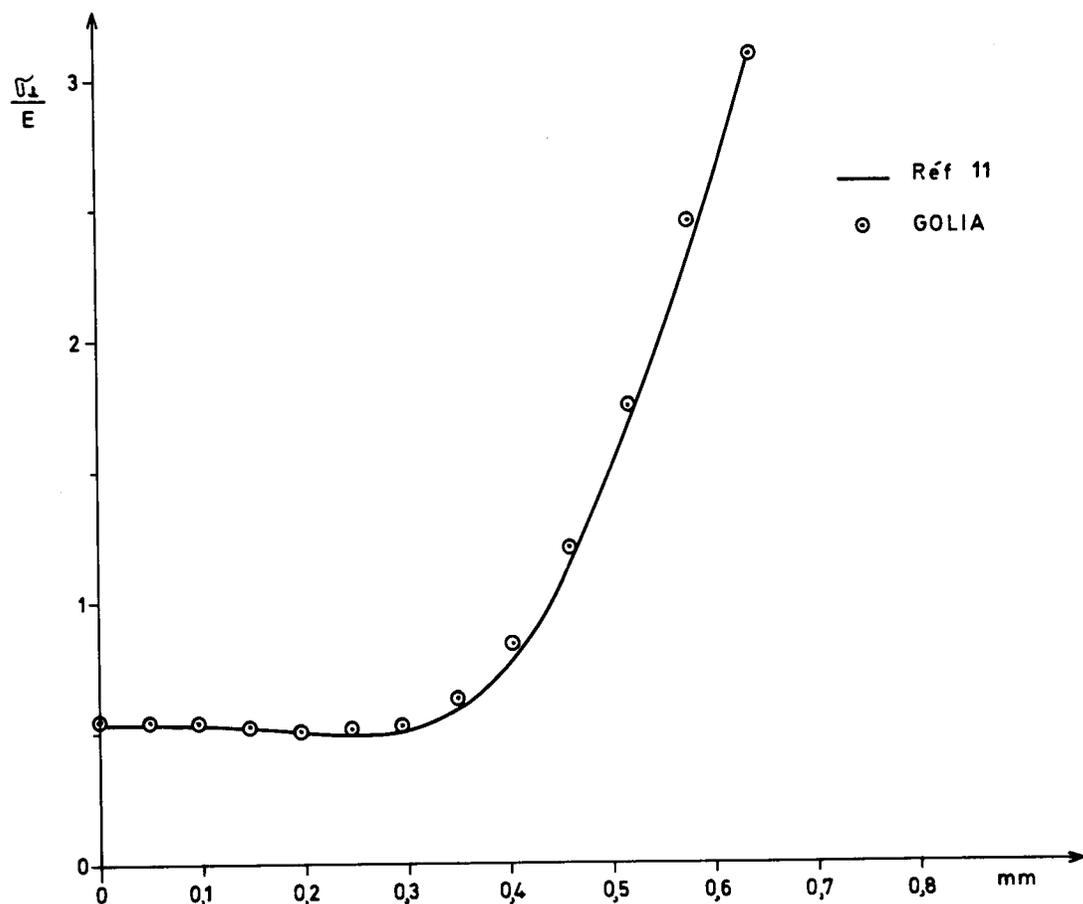


Fig. 10 a : Contrainte normale sur le côté BD

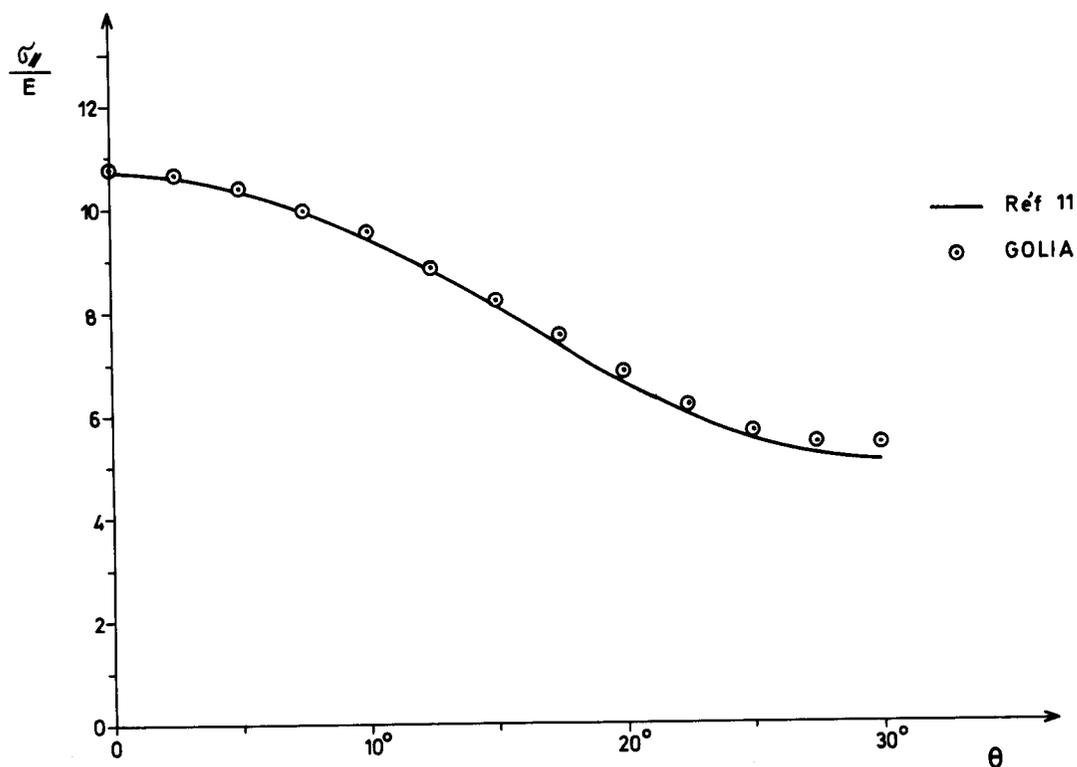


Fig. 10 b : Contrainte circonférentielle sur le côté AC

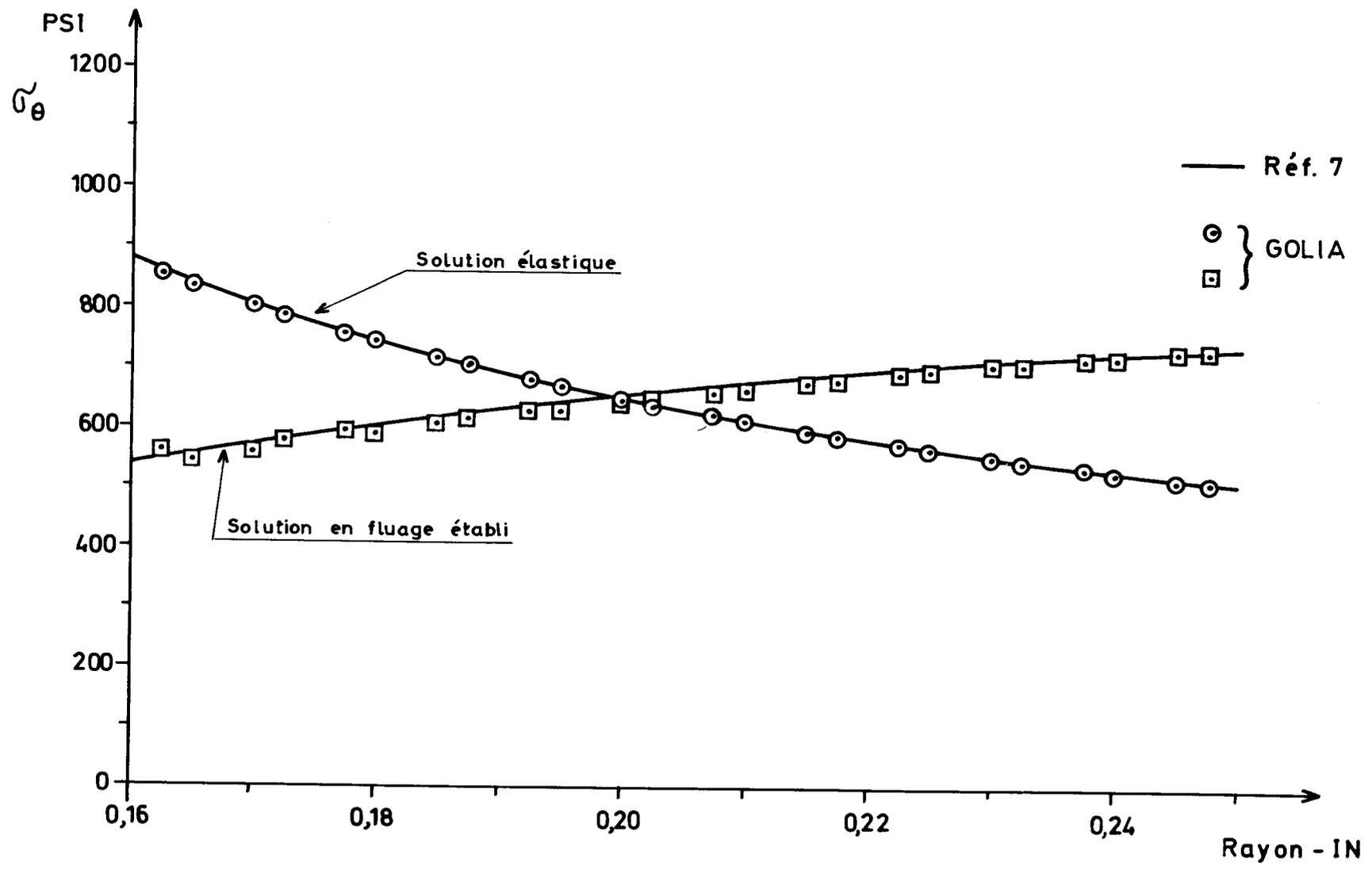


Fig. 11 : Distribution radiale de la contrainte circonférentielle .

APPENDICE A : Intégrales figurant dans les équations structurales
en cas de symétrie axiale.

1. Matrice de rigidité.

Le calcul de la matrice de rigidité $[K]$ donnée en (3.23) rend nécessaire le calcul des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} V &= \int dV & \lambda_3 &= \int \frac{1}{r^2} dV \\ \lambda_1 &= \int \frac{1}{r} dV & \lambda_4 &= \int \frac{z}{r^2} dV \\ \lambda_2 &= \int \frac{z}{r} dV & \lambda_5 &= \int \frac{z^2}{r^2} dV \end{aligned} \quad (A1)$$

où V est le volume de l'élément annulaire de section triangulaire et d'ouverture unitaire dans la direction azimutale (Fig 4) .

Puisque

$$dV = r dr dz$$

on obtient immédiatement que

$$V = R_g \Delta \quad ; \quad \lambda_1 = \Delta \quad ; \quad \lambda_2 = z_g \Delta \quad (A2)$$

où Δ = aire du triangle i, j, k

$$R_g = \frac{1}{3} (r_i + r_j + r_k) \quad ; \quad z_g = \frac{1}{3} (z_i + z_j + z_k)$$

Les trois dernières intégrales s'obtiennent en faisant usage du lemme de Green :

$$\oint_C Q dr = - \iint \frac{\partial Q}{\partial z} dr dz$$

Le calcul donne :

$$\lambda_3 = - \left\{ c_1 \ln(r_j/r_i) + s_1 (r_j - r_i) + c_2 \ln(r_k/r_j) + \right. \\ \left. + s_2 (r_k - r_j) + c_3 \ln(r_i/r_k) + s_3 (r_i - r_k) \right\} \quad (A3)$$

$$\lambda_4 = - \left\{ \frac{c_1^2}{2} \ln(r_j/r_i) + c_1 s_1 (r_j - r_i) + \frac{s_1^2}{4} (r_j^2 - r_i^2) + \right. \\ \frac{c_2^2}{2} \ln(r_k/r_j) + c_2 s_2 (r_k - r_j) + \frac{s_2^2}{4} (r_k^2 - r_j^2) + \\ \left. \frac{c_3^2}{2} \ln(r_i/r_k) + c_3 s_3 (r_i - r_k) + \frac{s_3^2}{4} (r_i^2 - r_k^2) \right\} \quad (A4)$$

$$\lambda_5 = - \left\{ \frac{c_1^3}{3} \ln(r_j/r_i) + c_1^2 s_1 (r_j - r_i) + \frac{c_1 s_1^2}{2} (r_j^2 - r_i^2) + \right. \\ \frac{s_1^3}{9} (r_j^3 - r_i^3) + \frac{c_2^3}{3} \ln(r_k/r_j) + c_2^2 s_2 (r_k - r_j) + \\ \frac{c_2 s_2^2}{2} (r_k^2 - r_j^2) + \frac{s_2^3}{9} (r_k^3 - r_j^3) + \frac{c_3^3}{3} \ln(r_i/r_k) + \\ \left. + c_3^2 s_3 (r_i - r_k) + \frac{c_3 s_3^2}{2} (r_i^2 - r_k^2) + \frac{s_3^3}{9} (r_i^3 - r_k^3) \right\} \quad (A5)$$

On a posé :

$$S_1 = \frac{z_j - z_i}{r_j - r_i}$$

$$C_1 = z_i - S_1 r_i$$

On obtient S_2 , C_2 , S_3 , C_3 par permutation des indices dans le sens i, j, k .

2. Forces nodales équivalentes à une pression normale uniforme.

Le calcul des forces nodales équivalentes à une pression normale uniforme agissant entre les noeuds i et j de l'élément représenté à la figure 4 nécessite l'évaluation des composantes γ_i dans l'expression (3.25).

Le long de $i-j$, les coordonnées sont liées par la relation

$$r = C_4 + S_4 z$$

avec

$$S_4 = \frac{r_j - r_i}{z_j - z_i} \quad ; \quad C_4 = r_i - S_4 z_i$$

si bien que

$$\gamma_1 = - \left\{ C_4 (z_j - z_i) + \frac{S_4}{2} (z_j^2 - z_i^2) \right\}$$

$$\gamma_2 = - \left\{ C_4^2 (z_j - z_i) + C_4 S_4 (z_j^2 - z_i^2) + \frac{S_4^2}{3} (z_j^3 - z_i^3) \right\}$$

$$\gamma_3 = - \left\{ \frac{c_4}{2} (z_j^2 - z_i^2) + \frac{s_4}{3} (z_j^3 - z_i^3) \right\}$$

$$\gamma_4 = 1/2 (r_j^2 - r_i^2) \tag{A6}$$

$$\gamma_5 = 1/3 (r_j^3 - r_i^3)$$

$$\gamma_6 = \left\{ \frac{c_1}{2} (r_j^2 - r_i^2) + \frac{s_1}{3} (r_j^3 - r_i^3) \right\}$$

APPENDICE B : Condition de déplacement horizontal uniforme aux noeuds d'un côté vertical sur lequel la résultante horizontale des forces est imposée.

En vertu de la relation (4.1) , l'équilibre horizontal de tout noeud i appartenant au côté vertical s'exprime sous la forme :

$$K_{xx}(i,i) u_i + K_{xy}(i,i) v_i + \sum_{j \neq i} \left[K_{xx}(i,j) u_j + K_{xy}(i,j) v_j \right] - F_x(i) = Q_x(i) \quad (B.1)$$

Dans cette équation, $F_x(i)$ est la composante horizontale de la force nodale statiquement équivalente aux déformations initiales , tandis que $Q_x(i)$ est la composante de la force externe appliquée au noeud i .

Cette dernière composante est indéterminée, mais on sait que la sommation des $Q_x(i)$ étendue à tous les noeuds appartenant au côté vertical doit équilibrer la résultante horizontale imposée R .

On aura donc en désignant par \bar{u} la valeur du déplacement uniforme recherché :

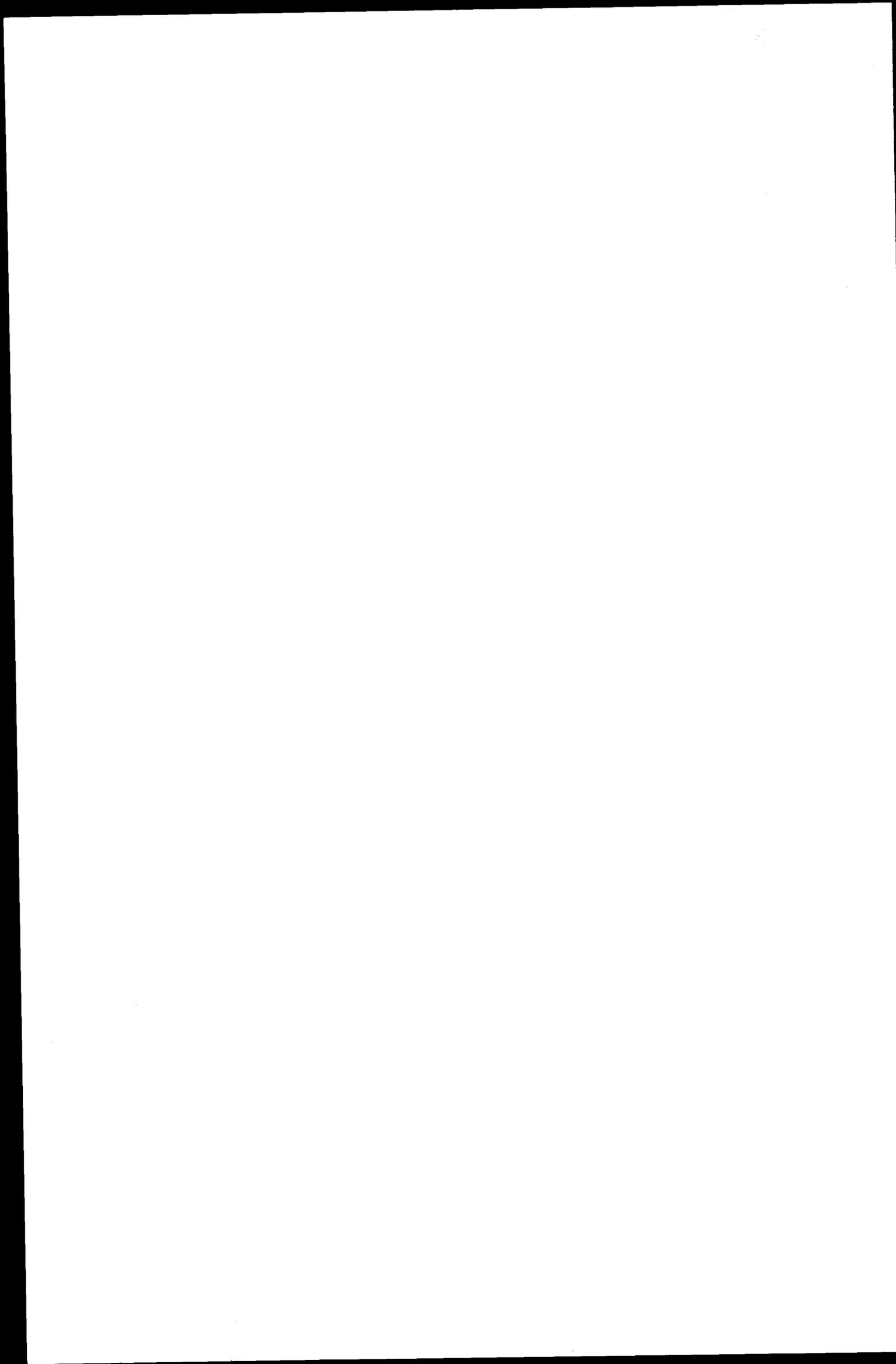
$$\bar{u} \sum_i K_{xx}(i,i) + \sum_i K_{xy}(i,i) v_i + \sum_i \left[\sum_{j \neq i} (K_{xx}(i,j) u_j + \right.$$

$$+ K_{xy}(i,j) v_j)] - \sum_i F_x(i) - R = 0 \quad (B.2)$$

On constate que la relation (B.2) déterminant le déplacement uniforme \bar{u} a en général pour effet d'accroître considérablement la largeur de bande du système (4.1) résultant du principe de variation des déplacements. Pour éviter de perdre la caractéristique essentielle du système linéaire déterminant les déplacements nodaux, à savoir la concentration des coefficients autour de la diagonale principale, on devra donc exclure l'équation (B.2) du système résolu par la méthode de Choleski. On procédera, dès lors, de la manière suivante :

- 1) On donne au déplacement \bar{u} une valeur approchée \bar{u}_0 et on résout par la méthode de Choleski le système (4.1) déterminant toutes les autres composantes u, v du déplacement. A l'aide de \bar{u}_0 et des déplacements obtenus, on calcule la valeur $F(\bar{u}_0)$ du membre de gauche de la relation (B.2) .
- 2) Etant donné le caractère linéaire de la relation (B.2) et des équations (4.1), le membre de gauche de (B.2) est une fonction linéaire de \bar{u} . Il en résulte qu'il suffira de répéter les opérations décrites au point 1 pour une deuxième valeur \bar{u}_1 de \bar{u} pour pouvoir déterminer la valeur du déplacement uniforme qui satisfait à l'équation (B.2). Cette valeur résultera de la relation :

$$\bar{u} = \bar{u}_0 - \frac{F(\bar{u}_0) \times (\bar{u}_1 - \bar{u}_0)}{F(\bar{u}_1) - F(\bar{u}_0)} \quad (B.3)$$



AVIS AU LECTEUR

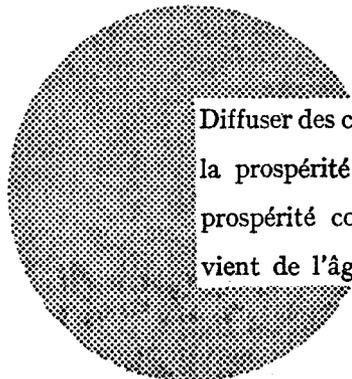
Tous les rapports scientifiques et techniques publiés par la Commission des Communautés Européennes sont signalés dans le périodique mensuel «euro-abstracts».

Pour souscrire un abonnement (1 an : FF 91,-, FB 820,-) ou recevoir un numéro spécimen, prière d'écrire à :

Handelsblatt GmbH
«euro-abstracts»
D-4 Düsseldorf 1
Postfach 1102
Allemagne

ou à

Office des Publications Officielles
des Communautés Européennes
Case Postale 1003 - Luxembourg/gare
37, rue Glesener, Luxembourg



Diffuser des connaissances c'est distribuer de la prospérité — j'entends la prospérité collective et non la richesse individuelle — et cette prospérité contribue largement à la disparition du mal qui nous vient de l'âge des ténèbres.

Alfred Nobel

BUREAUX DE VENTE

Tous les rapports publiés par la Commission des Communautés Européennes sont vendus dans les bureaux suivants, aux prix indiqués au verso de la première page de couverture. Lors de la commande, bien indiquer le numéro EUR et le titre du rapport qui figurent sur la première page de couverture.

OFFICE DES PUBLICATIONS OFFICIELLES DES COMMUNAUTÉS EUROPÉENNES

Case Postale 1003 - Luxembourg/gare
37, rue Glesener, Luxembourg (Compte chèque postal N° 191-90)

BELGIQUE — BELGIË

MONITEUR BELGE
Rue de Louvain, 40-42 - B-1000 Bruxelles
BELGISCH STAATSBAD
Leuvenseweg 40-42 - B-1000 Brussel

DEUTSCHLAND

VERLAG BUNDESANZEIGER
Postfach 108 006 - D-5 Köln 1

FRANCE

SERVICE DE VENTE EN FRANCE
DES PUBLICATIONS DES
COMMUNAUTÉS EUROPÉENNES
rue Desaix, 26 - F-75 Paris 15^e

ITALIA

LIBRERIA DELLO STATO
Piazza G. Verdi, 10 - I-00198 Roma

LUXEMBOURG

OFFICE DES
PUBLICATIONS OFFICIELLES DES
COMMUNAUTÉS EUROPÉENNES
Case Postale 1003 - Luxembourg/gare
37, rue Glesener - Luxembourg

NEDERLAND

STAATSDRUKKERIJ
en UITGEVERIJBEDRIJF
Christoffel Plantijnstraat - Den Haag

UNITED KINGDOM

H. M. STATIONERY OFFICE
P.O. Box 569 - London S.E.1

Commission des
Communautés Européennes
D.G. XIII - C.I.D.
29, rue Aldringer
L u x e m b o u r g