

**EUR 2389.f**

COMMUNAUTE EUROPEENNE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - EURATOM

**INSTABILITES HYDRODYNAMIQUES  
LIMITANT LA PUISSANCE DES REACTEURS  
A EAU BOUILLANTE**

(Volume II)

**LIBRARY COPY**

par

**J. BOURE  
(C.E.A.)**

**1965**



**Accord de coopération EURATOM/USA**

**Rapport EURAEC N° 1464 établi par le C.E.A.  
Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, France**

**Contrat Euratom N° 006-64-1 TEEF**

## AVERTISSEMENT

Le présent document a été élaboré sous les auspices de la Commission de la Communauté Européenne de l'Energie Atomique (EURATOM) en application du programme commun défini par l'Accord de coopération, signé le 8 novembre 1958, entre le gouvernement des Etats-Unis d'Amérique et la Communauté Européenne de l'Energie Atomique.

Il est précisé que la Commission d'EURATOM, le gouvernement des Etats-Unis, la United States Atomic Energy Commission, leurs contractants, ou toutes personnes agissant en leur nom :

ne garantissent pas explicitement ou implicitement l'exactitude, le caractère complet ou l'utilité des informations contenues dans le présent document, ni que l'utilisation d'une information, d'un équipement, d'une méthode ou d'un procédé quelconques divulgués dans le présent document ne porte pas atteinte à des droits privatifs;

n'assument aucune responsabilité quant à l'utilisation d'informations, d'équipements, de méthodes ou de procédés quelconques divulgués dans le présent document, ni quant aux dommages résultant de ladite utilisation.

Ce rapport est vendu dans les bureaux de vente indiqués en 4<sup>e</sup> page de couverture

|                     |          |          |            |           |
|---------------------|----------|----------|------------|-----------|
| au prix de FF 33,50 | FB 335,— | DM 26,80 | Lit. 4 180 | Fl. 24,20 |
|---------------------|----------|----------|------------|-----------|

**Prière de mentionner, lors de toute commande, le numéro EUR et le titre qui figurent sur la couverture de chaque rapport.**

Imprimé par EURATOM  
Bruxelles, décembre 1965

Le présent document a été reproduit à partir de la meilleure copie disponible.

**EUR 2389.f**

COMMUNAUTE EUROPEENNE DE L'ENERGIE ATOMIQUE - EURATOM

INSTABILITES HYDRODYNAMIQUES  
LIMITANT LA PUISSANCE DES REACTEURS  
A EAU BOUILLANTE

(Volume II)

par

J. BOURE  
(C.E.A.)

1965



Accord de coopération EURATOM/USA

Rapport EURAEC N° 1464 établi par le C.E.A.  
Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble, France

Contrat Euratom N° 006-64-1 TEEF

#### RESUME

Au moyen d'une étude bibliographique, on fait le point des connaissances actuelles au sujet du phénomène d'oscillations hydrodynamiques apparaissant sous certaines conditions, dans les écoulements chauffés avec ébullition.

On montre que la compréhension du mécanisme de ce phénomène ne peut se faire que grâce à des modèles, les plus schématiques possibles et on propose deux modèles relatifs à deux types différents d'oscillations.

Seul le « modèle monophasé » attribuant à l'« effet de densité » l'entretien des oscillations est étudié ici. Les équations de ce modèle conduisent à une analyse dimensionnelle et à la mise en évidence du mécanisme. Ce mécanisme est basé sur les retards et déphasages survenant au cours d'une perturbation, entre celle-ci et ses conséquences. Ils interviennent notamment dans l'équation de la dynamique intégrée le long du canal, par l'intermédiaire de termes de masse, de centre de masse et de moments d'inertie.

Les résultats qualitatifs et quantitatifs du modèle sont en excellent accord avec l'expérience. Ils montrent que le mécanisme ci-dessus est le véritable mécanisme moteur, que les paramètres adimensionnels du modèle ont une valeur générale et que les phénomènes négligés ici sont effectivement de peu d'importance du point de vue des seuils d'oscillation.

On montre le rôle important joué par le paramètre représentant la sous saturation et la nécessité de tenir compte de l'ébullition locale.

Enfin on passe en revue un certain nombre d'extensions et d'utilisations possibles du modèle monophasé.

A V E R T I S S E M E N T

Cet ouvrage rend compte, sous la forme qui nous a paru la plus logique a posteriori, d'un travail de plusieurs années. Dépassant l'objectif d'un simple rapport final, nous avons tenu à en faire une synthèse dégageant la philosophie du sujet. Il en résulte un volume important et la division en trois parties. La première, axée sur l'étude bibliographique, tente de reconstituer le cheminement qui nous a conduit à notre travail personnel, objet de la seconde partie. La troisième reprend, sous forme de conclusion, les points qui nous ont paru les plus importants. Par ailleurs, nous avons reporté en annexe la maximum de calculs et tout ce qui pouvait, sans en altérer la logique, être séparé du texte lui-même.

Dans cet esprit, il n'est évidemment pas question d'obliger le lecteur à une lecture intégrale. Nous lui conseillons de se reporter d'abord à la conclusion. Le sommaire lui indiquera ensuite les passages susceptibles de l'intéresser. S'il veut se faire une idée personnelle de l'état actuel de la question, il se reportera à la partie B de l'introduction. Les passages que nous considérons comme les plus importants pour la philosophie du modèle monophasé sont la partie C de l'introduction, puis les chapitres I (analyse dimensionnelle), II (mécanisme moteur), la partie du chapitre V concernant la signification physique des paramètres adimensionnels, les chapitres VII pour la justification du modèle, et X pour ses utilisations et ses possibilités d'extension. L'utilisateur éventuel se reportera également au chapitre VI. Quoi qu'il en soit, non seulement chaque partie, mais aussi chaque chapitre, a été conçu, dans toute la mesure du possible, comme une unité munie de son introduction et de sa conclusion propre, et qu'il est possible de lire indépendamment du reste.

## TABLE DES MATIERES

|  | Pages |
|--|-------|
| <u>NOMENCLATURE</u>  | 9     |
| <u>PREMIERE PARTIE - INTRODUCTION</u>                              |       |
| A. <u>Exposé préliminaire</u>                                      | I-1   |
| A.1 - Origines   |       |
| A.2 - Problèmes thermo-hydrodynamiques liés au changement de phase |       |
| A.3 - Définitions  |       |
| B. <u>Etude bibliographique</u>                                    | I-7   |
| B.1 - Caractères généraux des publications                         |       |
| B.2 - Plan de l'étude  |       |
| B.3 - Equations des écoulements diphasés                           |       |
| B.4 - Publications de mathématique                                 |       |
| B.5 - Publications de base   |       |
| B.6 - Autres études expérimentales                                 |       |
| B.7 - Autres études théoriques                                     |       |
| B.8 - Conclusion   |       |
| C. <u>Présentation de l'étude entreprise</u>                       | I-41  |
| C.1 - Les faits  |       |
| C.2 - Objectifs de l'étude   |       |
| C.3 - Définition de quelques modèles                               |       |
| C.4 - Conclusion   |       |

DEUXIEME PARTIE - MODELE MONOPHASEChapitre I - Equations générales

II-1

- I.1 - Définition
- I.2 - Equations dimensionnelles
- I.3 - Mise en forme du système d'équations
- I.4 - Analyse dimensionnelle
- I.5 - Equations adimensionnelles du modèle monophasé
- I.6 - Résolution partielle
- I.7 - Conclusion

Chapitre II - Etablissement et discussion de l'équation de base - Mécanisme des oscillations

II-21

- II.1 - Introduction
- II.2 - Cas d'une conduite chauffée sur toute sa longueur et à masse spécifique partout variable
- II.3 - Etude de la relation différentielle en  $\frac{dv}{dt}$ .  
Mécanisme moteur
- II.4 - Cas d'une conduite chauffée sur une partie de sa longueur, pour un paramètre de sous-saturation nul
- II.5 - Cas général
- II.6 - Conclusion

Chapitre III - Régime permanent

II-41

- III.1 - Introduction
- III.2 - Caractéristique hydraulique interne de la conduite
- III.3 - Domaine de fonctionnement possible
- III.4 - Conclusion

Chapitre IV - Petites perturbations

II-49

- IV.1 - Introduction
- IV.2 - Equation en  $c$
- IV.3 - Seuils d'oscillation - Equations en  $\omega$
- IV.4 - Conclusion

Chapitre V - Etude analytique

II-61

- V.1 - Etude analytique
- V.2 - Signification physique des paramètres et groupements adimensionnels
- V.3 - Influence des paramètres supplémentaires  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $s$
- V.4 - Influence des paramètres adimensionnels de gravité et de frottement  $g$ ,  $f$
- V.5 - Influence du paramètre adimensionnel de débit  $u_{00}$
- V.6 - Influence de la pulsation adimensionnelle  $\omega$
- V.7 - Etude du cas particulier où le système comporte un seul retard
- V.8 - Conclusion

Chapitre VI - Etude numérique

II-83

- VI.1 - Introduction
  - VI.2 - Programmes de calcul
  - VI.3 - Gamme de paramètres couverte
  - VI.4 - Résultats
  - VI.5 - Discussion - Influence des différents paramètres adimensionnels
  - VI.6 - Recherche des paramètres les plus caractéristiques pour le débit et la fréquence au seuil
  - VI.7 - Conclusion
- Tableaux I à III

Chapitre VII - Comparaison avec les résultats expérimentaux

II-125

I. Etude de tendances

- VII.1 - Introduction
- VII.2 - Influence des paramètres de géométrie
- VII.3 - Influence des propriétés physiques
- VII.4 - Influence des paramètres de fonctionnement
- VII.5 - Observations complémentaires
- VII.6 - Conclusion

Chapitre VIII - Comparaison avec les résultats expérimentaux

II-145

II. Comparaison quantitative

- VIII.1 - Introduction
- VIII.2 - Description de l'installation
- VIII.3 - Paramètres expérimentaux
- VIII.4 - Conditions et difficultés de la comparaison
- VIII.5 - Résultats et discussion
- VIII.6 - Conclusion

Tableaux IV à VII

Chapitre IX - Retour sur les termes moteurs

II-169

- IX.1 - Introduction
- IX.2 - Travail des forces extérieures
- IX.3 - Discussion
- IX.4 - Conclusion

Chapitre X - Utilisations et extensions du modèle monophasé

II-177

- X.1 - Introduction
- X.2 - Lois gouvernant les seuils d'oscillations
- X.3 - Lois de similitude
- X.4 - Amélioration d'une installation donnée ou recherche des conditions de fonctionnement optimales
- X.5 - Recherche de corrélations expérimentales
- X.6 - Préviation des seuils d'oscillation pour une installation donnée
- X.7 - Vérification de la légitimité de la linéarisation
- X.8 - Extensions du champ d'application du modèle
- X.9 - Conclusion

TROISIEME PARTIE - CONCLUSION

III-1

BIBLIOGRAPHIE

B-1

PHOTOS et FIGURES

(numérotées séparément 1 et 2 pour les photos  
1 à 52 pour les figures)

ANNEXES

A-1

- Annexe I - Introduction de singularités dans le modèle
- Annexe II - Cas où la masse spécifique est une constante
- Annexe III - Condition aux limites dynamique
- Annexe IV - Régime permanent
- Annexe V - Equation en  $c$
- Annexe VI - Equations en  $\omega$
- Annexe VII - Cas du "canal point"
- Annexe VIII - Etude analytique des "cas limites" en  $u_{00}$
- Annexe IX - Etude analytique des "cas limites" en  $\omega$
- Annexe X - Etude du cas sans "sous-saturation" ni zone adiabatique aval
- Annexe XI - Programmes de calcul
- Annexe XII - Equation d'état pour l'eau en ébullition
- Annexe XIII - Prise en compte de l'ébullition locale par le modèle monophasé
- Annexe XIV - Courbes de niveau de la surface ( $\Sigma$ ).

## NOMENCLATURE

Dans la mesure du possible, les lettres majuscules sont réservées aux grandeurs dimensionnelles, les minuscules aux paramètres adimensionnels correspondants.

### Lettres Latines

|   |  |   |  |
|---|--|---|--|
| A | section de passage du fluide   | a | groupement adimensionnel réel<br>(formule IV-8)  |
| B | groupement adimensionnel complexe (formule IV-5)   | b | groupement adimensionnel réel<br>(formule IV-8)  |
| D | diamètre hydraulique ou symbole différentiel en variables de Lagrange (suivant contexte) | c | constante adimensionnelle complexe<br>(formule II-6)   |
| E | fonction exponentielle définie par :<br>$E_x = e^{-cx}$                                  | d | symbole différentiel   |
| G | accélération de la pesanteur   | e | base des logarithmes népériens   |
| H | enthalpie  | f | paramètre adimensionnel de "frottement"  |
| K | nombre défini par : $K = \omega k$   | g | paramètre adimensionnel "de gravité"   |
| L | longueur   | h | enthalpie réduite  |
| M | groupement adimensionnel (annexe V)  | i | symbole des imaginaires ou indice (nombre entier positif) suivant contexte   |
| P | pression   | k | nombre défini par $k = \text{Log } m$  |
|   |  | l | longueur réduite ( <u>cette lettre, pouvant se confondre avec l(unité), n'est jamais utilisée sans indice, sauf dans (II-14') et au § 10.8.3</u> ) |
|   |  | m | nombre défini par $m = 1 - s + \frac{1}{u_{00}}$   |
|   |  | n | nombre entier positif  |
|   |  | p | pression réduite   |

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| R | masse spécifique   | r | constante adimensionnelle réelle (formule IV-1) |
| S | nombre défini par $s = \omega s$ , ou surface définie au chapitre III (suivant contexte) | s | sous-saturation réduite                         |
| T | temps  | t | temps réduit                                    |
| U | vitesse  | u | vitesse réduite                                 |
| V | perturbation de vitesse  | v | perturbation de vitesse, réduite                |
| W | densité volumique de puissance   | w | densité volumique de puissance, réduite         |
| Y | nombre défini par $Y = \omega y$   | x | variable d'intégration                          |
| Z | abscisse   | y | nombre défini par $y = \frac{l_1}{m u_{00}}$    |
|   |  | z | abscisse réduite                                |

#### Lettres grecques

|           |                                    |  |  |
|-----------|------------------------------------|--|--|
|           | $\alpha$                           | fraction volumique de vapeur ou coefficient adimensionnel (§ 10.8.3) (suivant contexte)                  |  |
|           | $\beta$                            | nombre défini par $\beta = \frac{R_g}{R_o}$ , ou coefficient adimensionnel (§ 10.8.3) (suivant contexte) |  |
|           | $\gamma$                           | glissement ou coefficient adimensionnel (§ 10.8.3) (suivant contexte)                                    |  |
| $\Delta$  | variation finie                    | $\delta$   | symbole différentiel                                   |
|           |                                    | $\zeta$  | fonction de $t$ définie par :                          |
|           |                                    |  | $\zeta = \int_{\lambda}^1 \rho z^2 dz$                 |
|           |                                    | $\eta$   | fonction de $t$ définie par :                          |
|           |                                    |  | $\eta = \int_{\lambda}^1 \rho z dz$                    |
| $\Theta$  | temps (formule I-6)                | $\theta$   | temps réduit correspondant à $\Theta$                  |
| $\Lambda$ | coefficient de frottement de Darcy | $\lambda$  | longueur de la zone chauffante sans "effet de densité" |

|  |  |
|--|--|
|  | $\mu$ nombre défini par $\mu = \frac{\omega(k+s+y)}{2\pi}$           |
|  | $\xi$ fonction de $t$ défini par<br>$\xi = \int_{\lambda}^1 \rho dz$ |
|  | $\pi$ nombre ( $\pi = 3,1416$ )                                      |
|  | $\rho$ masse spécifique réduite                                      |
| $\Sigma$ symbole (addition) ou surface définie au chapitre IV (suivant contexte) | $\sigma$ rapport de section  |
| $\Phi$ symbole (fonction)  | $\tau$ temps réduit  |
|  | $\varphi$ angle  |
|  | $\Psi$ coefficient de perte de pression (singularités)               |
| $\Omega$ pulsation   | $\omega$ pulsation réduite   |

### Indices

- $c$  se rapporte à une valeur caractéristique ou à une valeur dans la zone chauffante
- $f$  se rapporte à un terme de frottement
- $g$  se rapporte à un terme de gravité
- $i$  nombre entier positif ou nul
- $m$  moteur
- $r$  résistant
- BP se rapporte au by-pass
- } § 10.8.3
- $o$  se rapporte à une valeur de référence, au régime permanent ou à l'entrée de la zone chauffante
- $oo$  se rapporte à l'entrée de la zone chauffante en régime permanent
- $l$  se rapporte à la zone adiabatique aval
- Log symbole des logarithmes népériens.

Les formules dimensionnelles sont valables dans tout système cohérent, à condition d'exprimer les quantités de chaleur en unités d'énergie. (Ceci dans le seul but de simplifier l'écriture). Sauf spécification contraire, les valeurs des grandeurs dimensionnelles sont exprimées dans le système M.K.S. (toutefois les pressions sont en général en  $\text{kgf/cm}^2$ ).

Les formules sont numérotées par chapitres.

## PREMIERE PARTIE

### I N T R O D U C T I O N

#### A - EXPOSE PRELIMINAIRE

##### A.1 - ORIGINES

L'apparition de réacteurs nucléaires de puissance a provoqué un renouveau d'intérêt considérable pour des sujets déjà étudiés, mais pour lesquels une connaissance partielle et souvent empirique avait, jusqu'alors, suffi.

C'est le cas pour tous les problèmes thermo-hydrodynamiques liés à l'extraction, sous forme calorifique, de l'énergie dégagée au sein du réacteur. En particulier, lorsque le fluide caloporteur est un liquide, on admet de plus en plus souvent l'ébullition de ce liquide au sein même du réacteur, attitude qui présente de multiples avantages, mais complique considérablement les problèmes ci-dessus [5] [6]. Les constructeurs de chaudières s'étaient déjà heurtés à ces difficultés mais dans des gammes de paramètres et avec des impératifs très différents. (Pour ne citer qu'un exemple, les densités superficielles de flux thermique admises ont été multipliées par un facteur de l'ordre de dix entre les chaudières modernes - quelques dizaines de  $W/cm^2$  - et les réacteurs nucléaires - quelques centaines de  $W/cm^2$  -).

Un rapide survol de ces problèmes liés à l'ébullition fixera le contexte de l'étude entreprise.

Manuscrit reçu le 21 septembre 1965

## A.2 - PROBLEMES THERMO-HYDRODYNAMIQUES LIES AU CHANGEMENT DE PHASE

### A.2.1 - Caractéristiques générales des installations

Qu'il s'agisse de réacteurs nucléaires, de chaudières ou de tout autre appareil, le schéma de l'installation est toujours le même : pour évacuer la chaleur produite à l'intérieur d'un certain volume, on fait circuler un liquide dans des canaux traversant ce volume. Le liquide s'échauffe, puis se vaporise. L'élément de base d'une telle installation est essentiellement un conduit parcouru par le fluide et chauffé sur une partie de sa longueur. Les parties non chauffées sont des tronçons de raccordement sur lesquelles on peut, en première approximation, supposer qu'il n'y a aucun échange de chaleur.

Le fluide présent dans l'élément de base est soumis à deux séries de conditions aux limites :

- les conditions aux limites thermiques, dépendant notamment de la manière dont est produite la chaleur à évacuer. Elles se traduisent par la donnée de l'enthalpie du fluide en un point, et soit par celle de la densité de flux thermique et de sa répartition, soit par des lois plus compliquées. (Cas des réacteurs nucléaires où cette densité dépend de la masse spécifique du réfrigérant).
- les conditions aux limites hydrodynamiques, dépendant notamment de la manière dont on provoque la circulation du fluide. Elles se traduisent par la donnée de la pression en un point et par celle de la caractéristique hydraulique externe de l'élément de base (loi reliant le débit à la différence de pression, imposée de l'extérieur, entre les extrémités de cet élément).

Le fonctionnement de l'installation pose des problèmes de calcul et des problèmes de sécurité. Il faut connaître en chaque point et à chaque instant les caractéristiques du fluide (pression, vitesse, masse spécifique, enthalpie) et de la paroi (température) et s'assurer que l'installation ne court aucun danger.

Nous nous intéresserons dans la suite aux problèmes posés par la sécurité, mais les deux aspects ne sont pas séparables. Les références [5] et [6] traitent ces deux aspects et nous nous contenterons d'énumérer ci-dessous les phénomènes mettant en cause la sécurité de l'installation.

#### A.2.2. Echauffements critiques

L'échauffement critique est une augmentation soudaine, plus ou moins rapide et importante de l'écart de température entre le fluide et la paroi. Il survient à la suite d'un changement du mode de transfert thermique et peut entraîner la fusion locale de la paroi, donc la mise hors service de l'installation.

L'échauffement critique peut apparaître seul ou comme conséquence de l'un des phénomènes ci-dessous :

#### A.2.3. Discontinuités de débit

Elles se traduisent par une diminution brutale de débit et s'expliquent par la considération des caractéristiques hydrauliques interne et externe du canal. Dans le cas courant où il y a de nombreux canaux en parallèle, le débit total de l'installation change peu si le phénomène n'affecte qu'un nombre restreint de canaux : On dit alors qu'il y a redistribution de débit. Ces discontinuités peuvent conduire à l'échauffement critique.

#### A.2.4. Blocage de la circulation

Dans ce phénomène, le débit décroît rapidement, la vaporisation du liquide devient violente et provoque l'expulsion de l'émulsion, souvent par les deux extrémités du canal. Lorsque la puissance est maintenue, le canal peut se remplir à nouveau de liquide et le phénomène, se reproduisant, peut prendre une allure périodique.



#### A.2.5. Fluctuations de débit

Dans un circuit hydraulique, de telles fluctuations existent pratiquement toujours, mais elles sont d'amplitude très faibles. Si cette amplitude devient importante, elles peuvent devenir gênantes ou mêmes dangereuses.

Nous avons proposé ailleurs [4] une explication des phénomènes de blocage et de fluctuations.

#### A.2.6. Oscillations

Elles ont une période et une amplitude bien définies et concernent tous les paramètres thermo-hydrodynamiques : pression, vitesse, masse spécifique, enthalpie, températures. Elles sont gênantes (dans un réacteur nucléaire, par exemple, la puissance est liée, par l'intermédiaire de la réactivité, à la masse spécifique du milieu constituant le cœur. L'apparition d'oscillations de la puissance perturbe le pilotage du réacteur), peuvent devenir dangereuses et conduire à l'échauffement critique.

Notre étude sera consacrée aux oscillations. Par sa régularité ce phénomène se place en effet nettement à part, et il n'a pas dans la bibliographie d'explication satisfaisante et complète. L'échauffement critique est étudié d'une manière extensive par de nombreux laboratoires et les autres phénomènes décrits ci-dessus sont, soit expliqués, soit en voie de l'être.

### A. 3 - DEFINITIONS

Avant de passer à l'étude bibliographique qui nous permettra de faire le point de la question, il nous a paru nécessaire de rappeler le sens que nous donnons à certains termes revenant fréquemment dans le cours du texte.

L'expression "instabilités hydrodynamiques" est très fréquente dans la bibliographie. Malheureusement, suivant les cas elle désigne, soit l'ensemble des phénomènes énumérés au paragraphe précédent, soit certains de

ceux-ci. De plus, elle est mal choisie car suppose une définition préalable de l'instabilité. Chaque fois que cela sera possible nous l'éviterons dans la suite, et désignerons les phénomènes suivant les définitions du paragraphe précédent.

#### A.3.1. Stabilité

Nous dirons qu'un système est stable si, écarté de sa position d'équilibre, il la rejoint asymptotiquement (stabilité asymptotique). Dans un fluide en écoulement, nous ne tiendrons pas compte des très faibles fluctuations accidentelles toujours présentes. Nous sommes ainsi amenés à distinguer :

- des écoulements stables, qui ne peuvent être qu'en régime permanent,
- des écoulements instables, qui sont tels qu'un régime permanent puisse exister mais donne naissance spontanément, toutes choses restant égales par ailleurs, à l'un des phénomènes énumérés au paragraphe précédent,
- des écoulements impossibles, qui sont tels qu'un régime permanent ne puisse exister.

#### A.3.2. Seuils

Nous dirons que le système se trouve à un seuil si par une évolution faible d'un des paramètres, on peut, en changeant simplement le sens de cette évolution, rendre le fonctionnement, soit stable, soit instable ou impossible.

Un seuil d'oscillations sépare un domaine où le fonctionnement est stable d'un domaine où le fonctionnement est oscillant au sens du paragraphe A. 2.6.

#### A.3.3. Augmentation de la stabilité

L'écoulement étant défini par ses conditions aux limites énumérées en A.2.1, nous dirons que la stabilité est augmentée par telle modification

d'un paramètre si, toutes choses restant égales par ailleurs, l'instabilité apparaît à puissance thermique totale plus élevée. Du point de vue de l'utilisateur qui s'intéresse évidemment à la puissance maximum extractible, cette définition est la plus logique. Cependant, certains auteurs du domaine nucléaire intéressés davantage à la physique du réacteur (liaison entre la masse spécifique du réfrigérant et la réactivité) remplacent la condition "à puissance thermique totale plus élevée" par la condition "à qualité de sortie plus élevée". Cette distinction est importante : elle conduit en effet à des conclusions différentes comme nous le verrons en son temps, pour l'influence de certains paramètres.

#### A.3.4. Termes usuels relatifs aux écoulements diphasés

La qualité est le rapport, dans une section donnée, entre le débit massique de vapeur et le débit massique total.

La fraction volumique de vapeur (parfois taux de vide) est le rapport, dans une section donnée, entre la surface occupée en moyenne par la vapeur et la surface totale.

Le glissement est le rapport, dans une section donnée, entre la vitesse moyenne de la phase vapeur et celle de la phase liquide.

La configuration d'écoulement est l'aspect que présente l'écoulement pour un observateur.

La sous-saturation est pour un liquide l'écart entre la température de saturation et la température du liquide au point considéré. Elle peut s'exprimer en unités d'enthalpie.

## B - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

### B.1 - CARACTERES GENERAUX DES PUBLICATIONS

Nous nous intéressons aux oscillations. Nous avons vu toutefois ci-dessus que la distinction n'était pas toujours faite, par les auteurs, entre les différents phénomènes énumérés au paragraphe A.2. Il en résulte une certaine confusion.

Les recherches ont été en général conduites par les constructeurs d'installations, poussés par des raisons pratiques à étudier les phénomènes gênants pour les éliminer et améliorer les performances. Dans cette optique, les études fondamentales ont été rares et la compréhension n'a progressé que lentement.

Les premières publications sur les instabilités d'écoulements datent des années 30 et sont l'oeuvre des spécialistes allemands des chaudières comme Ledinegg [7]. Elles sont relatives aux discontinuités de débit (§ A.2.3) seuls phénomènes découverts à l'époque et n'ont plus qu'un intérêt historique. Les recherches ont été reprises vers 1955 par les spécialistes du génie atomique et ont donné lieu à une quantité importante de publications, de valeurs fort inégales, aux environs de 1960. En effet, les problèmes énumérés au chapitre précédent ne se sont posés avec acuité, aux constructeurs de réacteurs nucléaires, que lorsqu'on a envisagé l'ébullition du fluide caloporteur dans ces réacteurs. Après quelques années d'étude, on s'est aperçu que parmi ces phénomènes énumérés au paragraphe A.2 l'échauffement critique était le plus gênant aux pressions supérieures à  $70 \text{ kg/cm}^2$  en

général, règnant dans les réacteurs nucléaires de puissance considérés. Il en résulte, vers 1961/1962, une brusque diminution du nombre de publications sur les "instabilités" autres que les échauffements critiques, en même temps qu'un léger glissement des préoccupations vers des aspects moins pratiques et plus fondamentaux. De même, avant cette date, la quasi-totalité des publications était d'origine américaine. Depuis, à côté des grands organismes américains s'intéressant au problème (Argonne National Laboratory - General Electric Company, etc...) sont apparus dans la bibliographie les laboratoires européens, souvent plus préoccupés de ces aspects fondamentaux.

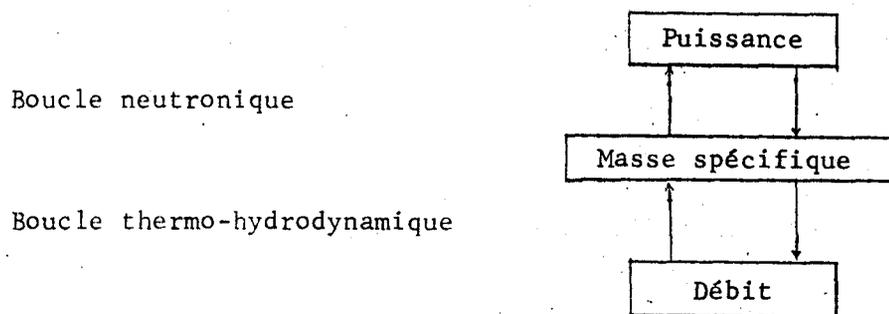
## B.2 - PLAN DE L'ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

C'est vers 1960 que nous avons commencé à nous intéresser au problème. Depuis cette date nous avons analysé, ou parcouru, plus d'une centaine de références. On en déduira aisément qu'un choix a dû être fait pour la présentation qui va suivre. Nous avons commencé par éliminer toutes les publications qui traitent visiblement d'un phénomène distinct des oscillations. (Dans la plupart, il s'agit en fait des discontinuités de débit). Une analyse un peu plus serrée permet de classer les autres en deux groupes, suivant que la densité de flux thermique est affectée ou non par le phénomène.

Dans une installation, telle que décrite en A.2.1., et où la densité superficielle de flux thermique est maintenue constante (cas des chaudières ou d'installations d'essais chauffées par effet Joule) il apparaît par un phénomène de réaction un couplage entre la masse spécifique et le débit. Nous le montrerons dans la seconde partie de cette étude, mais on le conçoit aisément par le raisonnement suivant : une diminution de débit provoque par l'intermédiaire du changement de phase une diminution de la masse spécifique et cet effet n'est pas instantané, car il est intégré sur le temps nécessaire au parcours de la longueur chauffante en ébullition. Cette diminution de la masse spécifique provoque à son tour, par l'intermédiaire de l'équation de la dynamique, une variation de débit. Cet effet

n'est pas instantané, il persiste pendant le temps nécessaire au parcours de la zone diphasée, qu'elle soit chauffante ou non. Dans un réacteur nucléaire, à ce couplage s'en ajoute un autre. La masse spécifique, par l'intermédiaire du flux neutronique, entraîne une variation de la puissance qui réagit à son tour, de manière non instantanée, sur cette masse spécifique.

Il apparaît donc deux boucles de couplage, reliées entre elles suivant le schéma ci-dessous :



Chacun de ces couplages peut provoquer des phénomènes d'instabilités. Or, comme nous le verrons ci-dessous, la description mathématique de ces boucles est fort compliquée. Elle comporte des équations aux dérivées partielles non linéaires dont certains termes sont mal connus, comme en particulier toutes les lois de la mécanique des écoulements diphasés en régime variable. Dans ces conditions, il est utopique de s'attaquer d'emblée au problème général. La compréhension du mécanisme du comportement de chaque boucle une fois acquise, il sera possible d'envisager sa résolution. Dans le cadre de cette étude, nous nous consacrons à la boucle thermo-hydrodynamique et nous n'analysons pas ci-dessous, sauf cas particulier, les articles traitant du problème général.

Ces préliminaires étant posés, nous adoptons le plan suivant :

- examen rapide de publications ne traitant pas des oscillations, mais dont l'étude est indispensable (équation des écoulements diphasés) ou utiles (aspect mathématique) ;
- analyse des publications dites "de base", résumés des travaux les plus importants que nous présenterons par laboratoires.

- revue des publications relatives à l'étude expérimentale des oscillations,
- revue des publications relatives à l'étude théorique des oscillations.

### B.3 - EQUATIONS DES ECOULEMENTS DIPHASES

Les quantités inconnues à déterminer sont en chaque point les caractéristiques du fluide et sur la paroi la température. Cette dernière est déterminée par les lois du transfert de chaleur paroi-fluide, qui bien qu'empiriques peuvent être considérées comme connues [5], au moins en régime permanent tant que n'apparaît pas l'échauffement critique.

Les caractéristiques du fluide sont : pression, température ou enthalpie, masse spécifique et vitesse. On n'introduit pas, en général, d'autres quantités mais elles pourraient au besoin s'exprimer facilement à partir des quatre quantités caractéristiques ci-dessus. On dispose pour les calculer de l'équation d'état et des trois équations classiques de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Sous une forme générale, on trouve ces équations dans tous les ouvrages d'enseignement. Dans les installations étudiées (§ A.2) les conduites peuvent en général se décomposer en tronçons cylindriques de longueurs importantes devant les dimensions transversales et, sauf exceptions, on admet que l'écoulement est unidimensionnel, c'est-à-dire que l'état du fluide ne dépend que d'une seule variable d'espace.

THURSTON [8] écrit, avec cette hypothèse, les équations de conservation pour un fluide homogène. En fait, les écoulements diphasés sont hétérogènes et il en résulte d'énormes difficultés. Ces difficultés font qu'il n'existe pas actuellement d'équations à la fois rigoureuses et utilisables pour le calcul de ces écoulements.

Deux procédés s'affrontent pour tourner la difficulté. Le premier n'est pas rigoureux dans sa formulation usuelle, car il suppose plus ou moins implicitement l'existence de filets liquides et de filets gazeux.

L'hypothèse correspondante est l'hypothèse des phases séparées. Elle consiste à admettre qu'on peut définir pour chaque phase dans chaque section et à chaque instant une pression, une température, une masse spécifique et une vitesse. En admettant que la pression est la même dans toute la section, on se trouve alors en présence, dans sa formulation la plus logique, d'un système de onze équations à onze inconnues.

Les onze inconnues sont : la pression, la concentration volumique d'une des phases, les transferts de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre phases et, pour chaque phase, la température, la masse spécifique et la vitesse.

Les onze équations sont les trois lois de transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie entre phases, et pour chaque phase l'équation d'état et les trois équations de conservation déjà citées.

On ne connaît pas les lois des transferts entre phases, mais on peut, soit tenter de les remplacer par des corrélations empiriques, soit tenter de les éliminer en remplaçant les six équations de conservation (trois pour chaque phase) par les trois équations "globales" de conservation. Cette dernière technique est la plus courante [10][11][12] mais l'élimination complète des transferts de quantité de mouvement et d'énergie entre phases n'étant pas possible, elle ne dispense pas d'introduire des corrélations empiriques (lois de glissement, par exemple) et des hypothèses souvent grossièrement erronées (équilibre thermique entre phases).

Quoi qu'il en soit, l'hypothèse des phases séparées est jusqu'à cette date la seule qui ait permis de pousser les calculs assez loin. En repartant des équations générales et en se préoccupant des conditions à l'interface, STANDART [13] semble avoir rendu rigoureuse la méthode des "phases séparées".

Le second procédé permettant de tenir compte de l'hétérogénéité des écoulements diphasés consiste à introduire des moyennes spatio-temporelles des différentes variables. L'écoulement n'est plus défini que statistiquement.

Le premier à introduire des moyennes a été MEYER [9]. Il a été ainsi amené à définir trois valeurs de la masse spécifique moyenne suivant l'équation dans laquelle cette masse spécifique figure. De même, il définit deux valeurs de l'enthalpie moyenne

BIRKHOFF [14] a récemment tenté dans le même sens une formulation rigoureuse pleine d'intérêt qui renouvelle complètement la question.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce sujet qui justifierait à lui seul une étude complète.

#### B.4 - PUBLICATIONS DE MATHEMATIQUES

Il s'agit d'ouvrages ou de travaux concernant la stabilité des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. N'ayant pas eu, dans notre propre étude, à utiliser ces travaux, nous n'avons pas réuni systématiquement ces publications très nombreuses.

Nous citerons une revue bibliographique, déjà un peu ancienne, de ROSENBERG [15] qui pose bien le problème, les nombreux travaux de BLAQUIERE [16] et MINORSKY [17] et deux articles récents [18] et [19].

#### B.5 - PUBLICATIONS DE BASE

Nous rassemblons sous ce titre les études, plus ou moins complètes, d'équipes ayant consacré des efforts importants aux problèmes d'instabilités et qu'il est indispensable de connaître avant toute étude des oscillations. Ces études sont classées assez subjectivement, dans un ordre tenant compte de la chronologie et de l'importance des résultats acquis. On remarquera (cf. § B.1) que sur ces neuf équipes, six sont américaines et ont publié antérieurement à 1962.

### B.5.1. Argonne National Laboratory

Ce laboratoire a publié, début 1960, la première étude bibliographique intéressante sur la stabilité (ANDERSON et LOTTES [20]). Comme la plupart des publications que nous avons à analyser, cette étude ne s'intéresse qu'au cas de la convection naturelle. Notons à ce propos qu'une idée fautive assez répandue consiste à penser que les oscillations sont impossibles en convection forcée. Les instabilités dont il est question ici sont le blocage (chugging), les fluctuations et les oscillations. La première partie est consacrée aux instabilités avec couplage de la puissance dans les réacteurs nucléaires tels que les réacteurs Borax, Spert, E.B.W.R. (description des phénomènes, études analytiques) et la seconde traite des instabilités sans couplage de la puissance.

Après avoir noté que les études déjà faites ne permettent de prévoir ni les seuils d'apparition, ni les fréquences et amplitudes des phénomènes, les auteurs passent en revue les tendances notées dans ces études expérimentales, puis les études analytiques et les causes avancées pour expliquer ces phénomènes.

#### Tendances expérimentales

Elles résultent des travaux des laboratoires d'Argonne (non publiés semble-t-il), de l'Université de Minnesota [24], de la Westinghouse [27] et de la General Electric [33].

L'influence de certains paramètres de géométrie est notée. (Influence stabilisatrice de pertes de charge dans la région en simple phase ou sur le circuit de retour, influence déstabilisatrice de pertes de pression dans la région en double phase, influence déstabilisatrice de la section de passage).

Une augmentation de pression a une influence stabilisatrice. La hauteur d'eau au-dessus de la boucle proprement dite n'a pas d'influence. Enfin, d'après la General Electric, une augmentation de la sous-saturation a une influence déstabilisatrice. On verra ci-dessous qu'il faut interpréter avec prudence cette conclusion.

Dans les expériences d'Argonne certains points en convection forcée sont stables, alors que des points similaires en convection naturelle ne le sont pas. (Le terme "similaire" n'est pas défini, mais il semble qu'il se rapporte au débit. Cet effet peut alors s'expliquer : Deuxième Partie - chapitre X).

#### . Etudes analytiques

ANDERSON et LOTTES délimitent parfaitement le sujet en définissant deux approches possibles :

- a) Approche dite "par les équations générales du système". Ce sont les équations énumérées ci-dessus en B.3. Elles sont, nous l'avons vu, fort mal connues et le système correspondant est difficile à résoudre (même numériquement). Finalement, bien que cette approche soit la seule logique, les hypothèses et simplifications nécessaires enlèvent toute signification générale aux résultats.

(Nous partageons entièrement ce point de vue, et il est curieux de constater que poussés par des raisons matérielles, comme la nécessité de faire des calculs servant de base de discussion et de comparaison pour les projets de réacteurs, de nombreux auteurs se sont lancés dans cette voie, sans issue dans l'état actuel des connaissances. Ce sont d'ailleurs en général les mêmes et pour les mêmes raisons que ceux qui étudient en une seule fois l'ensemble des deux boucles, neutronique et thermo-hydrodynamique, définies en B.2. Cela représente une somme d'efforts considérable.

- b) Approche par l'étude d'un mécanisme supposé "contrôler" le phénomène. (Lorsqu'on adopte cette démarche, il y a au départ un pari sur le mécanisme en question. De plus, les équations à écrire ne sont autres, sous une forme simplifiée, que les "équations générales" ci-dessus. Cependant, l'énorme avantage de la méthode est la possibilité de ne pas perdre de vue l'aspect physique des phénomènes tout au long du calcul. Les

hypothèses sont tout aussi hasardeuses que précédemment et les résultats sont quantitativement aussi peu sûrs, mais on peut "interpréter" physiquement hypothèses et résultats. Nous aurons l'occasion au cours de la seconde partie de constater la richesse de la méthode. Pour un défrichage, elle est la seule efficace. Il faudra ensuite revenir tôt ou tard à la méthode des équations générales lorsque (mais seulement lorsque) les idées sur le mécanisme seront précisées).

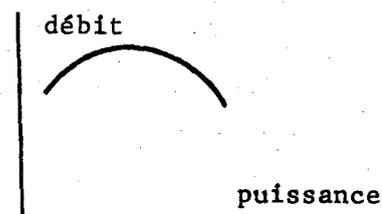
La méthode des équations générales est appliquée par QUANDT [26] [27] et WISSLER [24] que nous analysons plus loin.

L'autre méthode postule un mécanisme. Les auteurs énumèrent les causes possibles d'instabilités déjà avancées.

- Forme de la caractéristique hydraulique interne du canal :

(Loi reliant la perte de pression au débit dans le canal : voir par exemple Deuxième Partie - Chapitre III). Cette cause peut expliquer les discontinuités de débit, mais non les oscillations. QUANDT [26], entre autres, l'a montré.

- Forme de la courbe donnant, en convection naturelle, le débit en fonction de la puissance. Certains auteurs ont supposé que le fonctionnement ne pouvait plus être stable au-delà du maximum. Cependant la General Electric a observé des fonctionnements stables bien que sujets à fluctuations, dans la partie décroissante de la courbe (Nous avons personnellement montré [4] que le blocage ou les fluctuations apparaissaient, quand ils se produisaient, à droite du maximum).



- Effet d'allègement retardé dû à la colonne montante. C'est, de tous les mécanismes énumérés, celui qui paraît le plus vraisemblable et a été repris le plus souvent ultérieurement. Nous verrons d'ailleurs (Deuxième Partie - chapitre II) qu'il est proche du mécanisme que nous proposons, et qu'il est en fait un aspect partiel de celui-ci. ANDERSON et LOTTES notent que

l'hydrodynamique de la double phase (lois de pertes de pression, lois de glissement) est encore trop mal connue pour qu'on puisse accepter ou rejeter définitivement ce mécanisme. L'explication serait la suivante à partir d'une modification accidentelle de l'un des paramètres. Une diminution du débit à l'entrée, par exemple, provoque avec un certain retard une diminution du poids de l'émulsion dans la partie aval du canal et dans la colonne montante. Par l'intermédiaire des conditions aux limites hydrodynamiques, cette diminution provoque, avec un certain retard, une augmentation de débit. Si ces retards sont compris entre certaines valeurs, on conçoit qu'il puisse en résulter des oscillations.

- Echange d'énergie entre phases ou changement de la configuration d'écoulement. L'énergie cédée à une phase par l'autre provoquerait un changement de la configuration d'écoulement, donc des lois de perte de pression. Les auteurs pensent que si tel était le cas, il apparaîtrait une discontinuité dans la caractéristique interne du canal. Or, il n'en est rien pour les seuils observés à Argonne.
- La perte de pression peut devenir supérieure à la charge disponible. Ce serait, et cela semble être effectivement [4], l'explication du blocage.
- Choc sonique. La vitesse de propagation des ondes soniques est faible en double phase. Il semble cependant qu'en général le temps de parcours de la conduite par une perturbation de pression soit faible devant la période des oscillations, et que, par conséquent, les deux phénomènes ne soient pas directement liés.
- Résonance de l'installation aux fluctuations accidentelles

Les auteurs concluent en insistant sur la nécessité de mieux connaître expérimentalement les phénomènes.

Un an après cette analyse une autre équipe d'Argonne, dans un rapport consacré à une étude théorique des instabilités [21], se livre à une étude critique très intéressante sur les conditions dans lesquelles elles sont accessibles au calcul. Ses conclusions confirment et complètent bien ce qui a été dit ci-dessus sur les différentes approches analytiques possibles.

Utilisant l'approche dite "des équations générales" on a le choix entre trois voies :

- celle de l'étude analytique : le nombre d'hypothèses nécessaires à la poursuite des calculs est trop important pour que les résultats soient dignes de confiance ;
- celle des perturbations, après linéarisation des équations. Cependant, si un système linéarisé possède des solutions oscillatoires, on peut montrer que les solutions du système non linéaire de départ peuvent correspondre aux trois cas possibles (stabilité, oscillations, instabilité avec amplitudes croissantes). Il faut donc être très prudent dans l'interprétation des résultats ;
- celle de l'utilisation de machines électroniques de grande capacité. Contrairement à l'opinion des auteurs, nous pensons que le nombre d'hypothèses nécessaires est, comme pour la première voie, prohibitif (§ B.3). Après avoir tenté un calcul analogique et un calcul arithmétique, ils reconnaissent d'ailleurs, d'une part que les calculatrices utilisées ne sont pas assez puissantes, d'autre part que la transformation pour traitement sur machine des équations aux dérivées partielles en équations aux différences risque d'introduire des erreurs importantes dans des calculs de cette complexité.

Les auteurs notent que les résultats expérimentaux quantitatifs existants sont quasi- inexploitable. Leurs calculs ont permis de trouver les tendances suivantes :

- une augmentation du coefficient de frottement dans la zone en double phase fait croître l'amplitude des oscillations mais ne joue pas sur la période,

- une augmentation du coefficient de frottement en simple phase fait décroître l'amplitude,
- la valeur du glissement introduite dans les calculs influe sur le seuil et l'amplitude mais pas sur la fréquence,
- les fréquences croissent avec la pression,
- le domaine où le système oscille est un domaine fermé (autrement dit on peut traverser un domaine instable et retrouver la stabilité).

En 1962, une dernière publication du laboratoire [22] suivant la même voie présente un "modèle" pour le calcul sur machine analogique. Les résultats ne sont pas mauvais, mais, comme prévu, on ne peut en tirer aucune conclusion concernant le mécanisme et la complexité du modèle le rend "difficile à appliquer aux études de projets de réacteurs nucléaires".

A notre connaissance, le laboratoire d'Argonne n'a rien publié depuis. Il participe actuellement, en association avec des universités américaines, à un programme d'étude sur l'ensemble des problèmes soulevés par les écoulements diphasés, dit ANL-AMU programm [81].

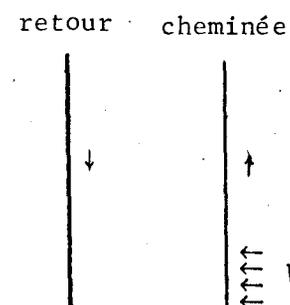
#### B.5.2. Université de Minnesota [23][24]

La thèse de WISSLER [23] est la première étude expérimentale et théorique importante des oscillations. Elle date de 1955 et est résumée en [24].

Dans la partie expérimentale, Wissler observe les oscillations d'un circuit fermé fonctionnant en convection naturelle. Le premier, il note que le fonctionnement est stable, aussi bien à faible puissance qu'à forte puissance (il y a alors en permanence une émulsion eau-vapeur dans la colonne montante). Lorsque pendant un cycle d'oscillations il y a constamment de la vapeur présente dans la colonne montante, la période est inversement proportionnelle à la vitesse moyenne. Si cette présence est

intermittente, les périodes sont plus grandes. Les périodes observées sont considérablement plus fortes que dans les autres études expérimentales (de l'ordre de la minute, contre quelques secondes). A notre connaissance, personne n'a jamais expliqué cet écart qui semble pourtant, à la réflexion, assez logique, compte tenu de la géométrie de l'installation et des observations habituelles reliant période et temps de parcours (forts diamètres, très grande longueur - la cheminée fait plus de 6 m - vitesses aux seuils faibles). Enfin, l'auteur trouve que les périodes des oscillations amorties qu'il est possible d'observer sur la même installation en simple phase sont cohérentes avec celles des oscillations non amorties en double phase.

WISSLER tente de retrouver les oscillations par le calcul en appliquant les "équations générales" à son installation, dans laquelle il a supprimé le "bouclage" en supprimant la partie horizontale du circuit de retour. Il trouve que le produit du coefficient d'expansion du fluide par la hauteur de la colonne montante doit dépasser une certaine valeur, fonction des coefficients de frottement, pour que des oscillations entretenues soient possibles. Il trouve également que la période est de l'ordre de grandeur du temps de parcours de l'ensemble canal chauffant colonne montante. Enfin, il pense que la force motrice ne peut provenir que de la colonne montante. Pour une boucle fermée simplifiée, le calcul est repris sur calculateur analogique, et les périodes d'oscillations restent du même ordre.



### B.5.3. WALLIS et HEASLEY [25]

Publiée pour la première fois fin 1960 c'est, étayée par des essais sur une installation à visualisation (convection naturelle de pentane), la première et, à notre avis, la seule analyse poussée des mécanismes déclencheurs. Elle présente toutefois le défaut de considérer le problème comme résolu alors qu'il est seulement posé et en conséquence ne donne ni

résultats quantitatifs, ni a fortiori comparaison avec l'expérience. (Par analogie, cela reviendrait à couper la seconde partie de notre étude à la fin du second chapitre).

Les auteurs distinguent trois mécanismes possibles, tous basés sur le fait que la boucle représentative du système comporte des retards non linéaires, des capacités (storage elements) et des résistances. Ils citent, mais n'étudient pas, la possibilité d'un quatrième mécanisme, par échange d'énergie entre phases et changement de la configuration d'écoulement. Les équations sont écrites en utilisant les variables de Lagrange (c'est-à-dire en suivant les particules) puis en linéarisant et en appliquant les techniques habituelles pour de petites perturbations (critère de NYQUIST, en particulier).

a) Oscillations dues aux termes d'élévation dans la colonne montante

(C'est le schéma déjà décrit en B.5.1 sous le nom d'effet d'allègement retardé dû à la colonne montante).

A la limite c'est le type d'oscillations qui prédomine lorsque le temps de séjour d'une particule dans la colonne montante est long devant le temps de séjour dans le canal chauffant. Le déroulement du calcul est analogue à celui que nous adopterons dans la seconde partie. La technique des petites perturbations permet d'aboutir à la relation :

$$M \frac{d\Delta V_0}{dt} + \frac{\partial f}{\partial V_0} \Delta V_0 + \beta \int_{t-T}^t \Delta V_0 dt = 0$$

où  $M$  est l'inertie de la boucle,

$\Delta V_0$  la perturbation de la vitesse à l'entrée à l'instant  $t$ ,

$f(V_0)$  est la chute de pression par frottement dans toute la boucle, colonne montante exceptée,

$T$  est le temps de séjour dans la colonne montante de la particule quittant cette colonne,

$\beta$  une constante.

Cette expression se compare à notre expression (II-14'). (Dans cette dernière,  $\beta$  est explicité).

L'origine des oscillations est dans le terme  $\beta \int_{t-T}^t \Delta V_0 dt$

Les auteurs ne poussent pas plus loin le calcul, mais donnent la méthode (poser  $\Delta V_0 = \epsilon e^{st}$ , faire  $s = i\omega$  imaginaire pur, en déduire la valeur au seuil de  $\frac{\partial f}{\partial V_0}$  ce qui pourrait conduire à un critère. Nous verrons qu'un tel critère est inaccessible autrement que numériquement). Les périodes sont de l'ordre de grandeur du temps de séjour dans la colonne montante.

#### b) Oscillations dues au canal chauffant

C'est le même mécanisme, mais la mise en équation est plus compliquée. Elle aboutit à l'expression :

$$\Delta P = \int_0^H \left\{ \frac{f \rho V^2}{2 g D} + \frac{\rho}{g} \frac{dV}{dt} + \rho \right\} dh$$

où :  $f$  est le coefficient de frottement "approprié"

$H$  la longueur chauffante

$\rho$  la masse spécifique

$\Delta P$  la perte de pression totale dans le canal chauffant.

Le calcul général n'est pas poussé davantage et les auteurs envisagent deux cas :

- Dans le premier, la perte de pression est concentrée dans une perte singulière (restriction) à la sortie. Le phénomène a été observé sur l'installation à pentane et les périodes d'oscillations correspondantes sont de l'ordre de grandeur du temps de parcours de la zone chauffante. Le calcul se fait comme précédemment par la méthode des petites perturbations. On utilise le diagramme de NYQUIST. Un facteur important apparaît sous la forme :

$$\frac{F}{M V_0 e^{\alpha T}}$$

où  $F$  est la perte de pression singulière en régime permanent

$M$  est l'inertie du système

$V_0 e^{\alpha t}$  la vitesse à la sortie de la section chauffante (régime permanent)

La stabilité augmente avec  $M V_0 e^{\alpha t}$  (inertie) et diminue si  $F$  augmente, ce qui est intuitivement correct.

- Dans le second cas envisagé, la perte de pression totale dans le canal chauffant est maintenue constante (cas de nombreux canaux en parallèle). Les méthodes sont les mêmes, mais le tracé du diagramme de NYQUIST est plus complexe et n'est pas fait.

c) Oscillations dues à une perte de pression singulière à la sortie de la colonne montante.

Ces oscillations sont seulement décrites, mais n'ont pas donné lieu à une étude analytique. Elles correspondent à une période beaucoup plus longue que les autres cas, à chaque cycle la vapeur emplît complètement la colonne montante.

B.5.4. QUANDT [26] [27]

Comme pour la publication précédente, une série d'expériences sert de base à une étude analytique. Cette série d'expériences a montré que le seuil d'apparition était réversible et que la qualité à la sortie du canal chauffant, correspondant à ce seuil était pour une géométrie donnée, fonction surtout de la pression et de la sous-saturation.

Pour son étude analytique, dans laquelle la perte de pression totale est prise constante, QUANDT part des équations générales, linéarise (petites perturbations) et utilise la transformation de Laplace (fonctions de transfert). Pour ce faire, il est obligé de faire de nombreuses hypothèses (cf B.5.1 référence [21]). Il admet notamment que le débit moyen est la moyenne des débits entrant et sortant, que la qualité à mi-canal peut être assimilée à la qualité moyenne et enfin que la période d'éventuelles

oscillations est forte devant le temps de parcours de la région double phase par une particule (elle devrait être au moins quatre fois ce temps). Les résultats montrent que cette dernière hypothèse est loin d'être vérifiée, les périodes étant environ une fois et demie le temps de parcours.

Les conclusions concernent les influences stabilisatrices d'augmentations de la pression, de la perte de charge ou de l'inertie à l'entrée et l'origine du phénomène : celui-ci ne peut provenir dans les cas usuels que des termes en  $\frac{\partial \rho}{\partial h}$ , dérivée de la masse spécifique par rapport à l'enthalpie. Une autre cause possible d'oscillations, non étudiée, serait une répartition non uniforme du flux thermique. Deux conclusions sont particulièrement importantes :

- la valeur minimale de  $\frac{\partial \rho}{\partial h}$  compatible avec un comportement oscillatoire rend impossible en pratique un tel comportement en simple phase ;
- les termes de gravité ne jouent pas de rôle particulier et des oscillations peuvent naître, que l'écoulement soit vertical ascendant, vertical descendant ou horizontal.

La comparaison de la théorie et de l'expérience, compte tenu des hypothèses, ne peut se faire qu'en ajustant arbitrairement  $\frac{\partial \rho}{\partial h}$ . Cette quantité jouant le rôle déclencheur, on ne peut dès lors rien conclure de l'accord obtenu dans quelques cas par QUANDT.

#### B.5.5. MEYER [28] à [32]

MEYER fait, comme QUANDT, partie de la Westinghouse, mais leurs études sont quasi-indépendantes. Dans [28], MEYER propose quatre "modèles" pour l'étude des régimes transitoires, toujours en partant des "équations générales".

- Le premier n'a de modèle que le nom : il transforme, pour le traitement numérique, les équations aux dérivées partielles en équations aux différences en faisant le moins d'hypothèses possible. Le temps de calcul sera prohibitif (cf. [21]).

- le second "momentum integral model" est ainsi dénommé parce qu'on intègre à chaque instant l'équation de la dynamique, en admettant que la masse spécifique n'est fonction que de l'enthalpie.
- Le troisième suppose en plus que la vitesse n'est fonction que du temps et ne peut donc donner que des résultats grossiers, pour des régimes très peu variables.
- Le quatrième "channel integral model" est ainsi nommé parce qu'on intègre à chaque instant les "équations générales". On est obligé de se donner le "profil" de l'enthalpie, variations de l'enthalpie avec l'abscisse. Ce dernier modèle [29] ne permet pas de retrouver les seuils expérimentaux d'oscillation. Aussi, par la suite [30] [31] [32], seul est retenu le "momentum integral model".

La méthode de calcul est analogue à celle que nous utiliserons au début de la seconde partie (chap. I et II). Il s'introduit plusieurs définitions relativement arbitraires de la masse spécifique (cf B.3 référence [9]). Il est tenu compte du phénomène de conduction dans les parois du canal chauffant. Enfin, il est fait l'hypothèse que dans la colonne montante, les paramètres ne sont pas perturbés, en moyenne, ce qui revient à admettre une période faible devant le temps de parcours de la colonne montante. Cette hypothèse n'est pas vérifiée en pratique. Dans [30] et [31] le système d'équations aux dérivées partielles obtenu est transformé sans linéarisation en système d'équations différentielles (par rapport à la variable temps) et aux différences (par rapport à la variable d'espace), pour permettre le calcul sur machine arithmétique. Les résultats sont "encourageants" (l'ordre de grandeur est bon) après ajustement de l'amortissement. La réponse du système à des oscillations de la perte de pression totale présente un pic de résonance vers un hertz. L'auteur pense que ce pourrait être un mécanisme de déclenchement possible d'oscillations, à partir des fluctuations naturelles des paramètres hydrauliques, par atténuation du facteur d'amortissement quand la puissance thermique croît.

L'exploitation du modèle sous cette forme coûte cher et une version linéarisée en est présentée dans [32].

#### B.5.6. GENERAL ELECTRIC (S. LEVY and al.) [33] à [37]

Les références [33] à [36] concernent une étude expérimentale dans laquelle l'influence de plusieurs paramètres est analysée, mais qui n'est pas consacrée uniquement aux oscillations et qui ne s'intéresse qu'au cas de la convection naturelle.

Deux remarques sont nécessaires avant d'aborder l'étude de ces publications. La première concerne la définition du seuil. A la pression utilisée (70 kgf/cm<sup>2</sup> environ) les fluctuations accidentelles prennent de l'importance et il est souvent malaisé de distinguer fluctuations et oscillations : les deux phénomènes ne sont pas étudiés séparément et il est arbitrairement admis que le système est instable si les fluctuations de perte de pression dépassent 10 % de la valeur moyenne. La seconde remarque importante concerne la définition d'une variation de stabilité. Cette définition est différente de la nôtre (cf A.3.3), la General Electric se préoccupant de la qualité à la sortie au moment du seuil et non de la puissance. Ces deux quantités sont liées par l'équation traduisant le bilan thermique :

$$W = M (\Delta H_e + x_s H_{lg})$$

où : W est la puissance  
 M le débit  
 $\Delta H_e$  la sous-saturation à l'entrée  
 $H_{lg}$  la chaleur latente de vaporisation  
 et  $x_s$  la qualité à la sortie.

Lorsque la sous-saturation  $\Delta H_e$  varie, cette équation montre que, au seuil, la puissance W et la qualité à la sortie  $x_s$  ne varient pas forcément dans le même sens et il en résulte que la définition de la General Electric (la stabilité est dite augmentée si les oscillations apparaissent à

plus forte qualité de sortie) ne donne pas forcément les mêmes lois que la nôtre (la stabilité est dite augmentée si les oscillations apparaissent à plus forte puissance). Le fait que le débit ne soit pas, en convection naturelle, un paramètre indépendant complique encore l'interprétation.

Ceci étant, les observations faites sont les suivantes [33] :

- lorsque la sous-saturation à l'entrée est augmentée, le débit au seuil croît également et la qualité de sortie correspondante décroît. Les auteurs ne disent pas dans quel sens varie alors la puissance au seuil. Si, étant dans le domaine instable, la sous-saturation est augmentée, l'amplitude des oscillations croît,
- une augmentation du diamètre hydraulique a un effet déstabilisateur : puissance et qualité de sortie au seuil décroissant,
- une augmentation des pertes de pression sur le circuit de retour à un effet stabilisateur,
- la période des oscillations est de 2 à 4 s et de l'ordre de grandeur des  $3/4$  du temps de parcours de la colonne montante,
- l'amplitude au-delà du seuil croît lorsqu'on augmente la puissance,
- les instabilités apparaissent toujours dans la région où le débit décroît en fonction de la puissance, toutes choses restant égales par ailleurs. La qualité au seuil est de l'ordre de 0,6 à 0,9,
- Enfin, les auteurs notent que l'introduction d'une pompe dans le circuit a un effet stabilisateur, mais ils ne précisent pas les conditions de cet essai.

Parmi les mécanismes susceptibles d'expliquer le comportement oscillatoire de l'installation, les auteurs citent l'effet d'allègement retardé de la colonne montante et le changement de configuration d'écoulement, mais pensent que ce ne sont pas les bons.

Le seul apport de [34] en ce qui concerne les instabilités est que le fait d'incliner la section d'essais ne change pas qualitativement les lois du phénomène. Les seuils ne sont pas comparés aux seuils obtenus dans [33].

Dans [35] et [36], les auteurs étudient (dans le cadre de l'étude préliminaire du comportement d'un réacteur nucléaire embarqué sur un navire) l'influence d'une composante périodique du champ de gravitation. L'amplitude de cette composante varie de 0,05 à 0,65 g, sa période de 0,8 à 3,2 s (elle est donc du même ordre que celle des oscillations observées ci-dessus). Son influence est stabilisatrice en général. Toutefois, il n'y a pas stabilisation lorsque la période du champ est voisine (écart  $< 10\%$ ) de la période des oscillations observées en l'absence de la composante périodique.

La méthode dite des "équations générales" est appliquée dans [37] et [36] au même cas dans un calcul analogique. Les résultats sont jugés encourageants par les auteurs. (Ils retrouvent notamment que la période est un peu supérieure au temps de parcours de la zone en double phase et que des pertes de pression dans la zone en simple phase ont un effet stabilisateur)

#### B.5.7. FLECK [38] à [40]

L'étude théorique de FLECK tente de prendre en compte simultanément les deux boucles citées en B.2 : la boucle thermo-hydrodynamique et la boucle neutronique. Faisant une entorse à la règle que nous nous sommes fixée, nous le citons néanmoins pour deux raisons :

- d'une part, FLECK insiste beaucoup sur l'aspect hydrodynamique,
- d'autre part, son premier article [38] comporte une excellente description des phénomènes observés dans les réacteurs nucléaires (BORAX et SPERT). Il distingue trois phases.

Dans la première phase (faible puissance ou faible addition de réactivité) on observe des fluctuations au hasard d'amplitude importante, surtout à basse pression.

Dans la seconde phase (puissance ou addition de réactivité plus importante) il apparaît des trains d'oscillations de fréquence bien définie, séparés par des intervalles où le comportement est celui de la première phase. Ces intervalles diminuent jusqu'à s'annuler lorsque puissance ou addition de réactivité sont suffisantes.

Dans la troisième phase (très forte addition de réactivité) les oscillations deviennent divergentes et il y a blocage du débit, avec expulsion.

Ces trois phénomènes différents ont été décrits en A.2. FLECK écrit les équations générales pour un réacteur refroidi en convection naturelle, et introduit un nouveau paramètre qui, d'après lui, joue un rôle dynamique important : la hauteur d'eau au-dessus du coeur. Les hypothèses faites sont raisonnables comme celle qui consiste à admettre des distributions linéaires de vitesse et de fraction volumique de vapeur pour simplifier les calculs. Il complète son système par les équations représentatives du couplage neutronique. La seule résolution possible est évidemment numérique et les conclusions qu'il est possible d'en tirer sont restreintes : dans certains cas, le réacteur peut être stable, même pour des additions importantes de réactivité. Dans d'autres cas, l'apparition des instabilités est indépendante des paramètres thermiques et nucléaires, bien que le comportement ultérieur du réacteur en dépende : le phénomène est alors d'origine purement hydrodynamique.

La communication [39] est très courte et ne contient aucun calcul. FLECK y distingue deux types d'instabilités, suivant leur origine hydrodynamique ou neutronique. Ses conclusions (concernant, par exemple, l'influence du glissement) ne semblent pas réalistes et nous n'y insisterons pas.

Dans [40], FLECK insiste à nouveau sur cet aspect du problème et il conclut qu'on ne peut déduire le comportement d'un réacteur du comportement de l'installation thermo-hydrodynamique correspondante : du fait de la

présence de la boucle neutronique, le réacteur peut être stable même si l'installation ne l'est pas, et la réciproque est vraie. Ceci peut paraître évident (cf. B.2.) mais étant donné son importance pratique, cette remarque doit être faite.

B.5.8. AKTIEBOLAGET ATOMENERGI (BECKER and al.) [41]

Après les publications américaines, antérieures à 1962, nous analyserons les travaux nettement plus récents de deux organismes européens (suédois et norvégiens).

Le rapport [41] peut être considéré comme un rapport final, reprenant et résumant des résultats déjà publiés antérieurement, notamment au Symposium de Studsvik, d'Octobre 1963. L'originalité de ce travail est, sur le plan expérimental, l'étude simultanée des phénomènes d'oscillations et d'échauffement critique. A faible pression, les oscillations apparaissent d'abord en général. Lorsque la pression croît, les seuils des deux phénomènes se rapprochent (cf. B.1) jusqu'à se confondre pour une pression de l'ordre de  $70 \text{ kgf/cm}^2$ .

BECKER et al ne s'intéressent qu'au cas de la convection naturelle. Ils retrouvent les influences déjà présentées avant eux de la pression (stabilisatrice) d'une perte de charge sur la zone simple phase (stabilisatrice). Ils sont en contradiction avec la General Electric [33] sur l'effet du diamètre hydraulique, mais ne concluent pas avec certitude sur ce point.

Une importante contribution de [41] à la connaissance du phénomène concerne l'influence de la sous-saturation. Une augmentation de celle-ci aurait une influence d'abord déstabilisatrice puis stabilisatrice. La valeur de la sous-saturation pour laquelle l'influence s'inverse n'a malheureusement pas été déterminée expérimentalement, mais pour une pression de  $50 \text{ kgf/cm}^2$  elle se situerait aux environs de  $30^\circ\text{C}$ .

Sur le plan théorique, l'approche adoptée dans [41] est toujours celle des équations générales et le calcul ne présente pas d'originalités particulières. On y introduit des corrélations empiriques de pertes de pression et de glissement et le système est traité numériquement pour deux types de conditions aux limites (circuit en convection naturelle ou canal fonctionnant avec une perte de pression totale constante). Les résultats de ces calculs peuvent être considérés comme bons, mais n'apportent rien de plus à la connaissance du phénomène.

#### B.5.9. Institut for ATOMENERGI [42]

C'est une étude théorique, destinée à la mise au point d'une méthode de calcul, dite "Kjeller Model" pour l'étude de la dynamique des canaux des réacteurs. Nous la citons dans ces articles de base parce qu'elle est un bon exemple de l'emploi des "équations générales" complétées par des corrélations empiriques et parce qu'étant assez récente, elle peut être considérée comme un aboutissement (provisoire) de cette approche du phénomène.

Le "Kjeller Model" tient compte de travaux plus anciens comme ceux de KIRCHENMAYER [43][44] auteur d'un "modèle" incluant la boucle neutronique et ceux de CHRISTENSEN [45]. Comme le notent les auteurs, les différences entre ce "modèle" et tous ceux que l'on peut trouver dans la bibliographie sont dues aux simplifications nécessaires à la résolution, aux hypothèses physiques et aux méthodes numériques de résolution. Ici, il est tenu compte de l'ébullition locale, du glissement entre phases, des pertes de pression en double phase. Les équations sont linéarisées pour permettre l'étude de petites perturbations sur un calculateur arithmétique.

Nous noterons deux résultats importants, obtenus avec le Kjeller Model : d'une part en comparant les résultats obtenus avec et sans ébullition locale, on constate que ce phénomène joue beaucoup ; d'autre part, on vérifie, en accord avec les résultats de [41], que la sous-saturation a une influence déstabilisatrice lorsqu'elle est faible, stabilisatrice quand elle

est forte. Cette inversion de l'influence semble d'ailleurs liée ici à l'ébullition locale puisqu'elle disparaît si on ne tient pas compte de celle-ci. Comme pour les autres "modèles" existants, les auteurs se contentent de constater que les résultats numériques obtenus avec le "Kjeller Model" sont encourageants.

#### B.6. AUTRES ETUDES EXPERIMENTALES

Ce paragraphe ne prétend pas être une analyse de la bibliographie non citée ci-dessus. Nous voulons seulement citer quelques références complétant ou confirmant ce qui a déjà été dit.

##### B.6.1. Influence de la pression

Il est universellement admis que la pression possède une influence stabilisatrice. A titre d'exemple, citons à ce sujet des travaux anciens russes [46] et américains [47]. Une influence moins connue est donnée par le laboratoire d'Eindhoven [48] qui, dans une étude consacrée à la convection naturelle, constate que plus la pression augmente plus le seuil d'oscillations est difficile à déceler. En effet, à basse pression l'amplitude des oscillations croît très vite avec la puissance, puis semble atteindre une valeur limite. Il n'en est pas de même à haute pression (cette amplitude croît moins vite et atteint une valeur limite plus faible. De plus, les oscillations coexistent avec des fluctuations).

##### B.6.2. Influence de la géométrie

La possibilité d'oscillations en écoulements horizontaux est notée, bien avant les travaux théoriques de QUANDT, par SEMENOVKER [49]. Le même auteur trouve également qu'une augmentation du diamètre hydraulique possède une influence déstabilisatrice.

L'influence géométrique la plus souvent citée est celle, stabilisatrice, de pertes de charge situées dans une région en simple phase, qu'elle

soit en amont du canal, ou dans le cas de la convection naturelle, sur le circuit de retour [46] [47] [49] [50] [51]. Par contre, des pertes de pression situées dans la zone en double phase ont une influence déstabilisatrice [46] [51].

On peut rattacher à la géométrie tous les paramètres relatifs à la nature de la paroi. Il a été observé en [1] des différences de comportement considérables entre une paroi en aluminium et une paroi en acier inoxydable. La Ramo-Wooldridge [52] à [54] a étudié l'influence des conditions de nucléation sur le déclenchement du phénomène. Une surface possédant peu de germes favorise les instabilités.

#### B.6.3. Influence de la sous-saturation

Les travaux du laboratoire d'Eindhoven [48] confirment que lorsqu'elle croît à partir de valeurs très faibles la sous-saturation a une influence d'abord déstabilisatrice. Cette influence s'inverse et devient stabilisatrice pour des valeurs plus importantes. Pour une pression de l'ordre de  $6 \text{ kgf/cm}^2$  la sous-saturation pour laquelle l'effet s'inverse est de l'ordre de  $2$  à  $3^\circ\text{C}$ , ce qui explique que cette inversion soit passée inaperçue des autres chercheurs (voir également Deuxième Partie - § 7.4.1).

#### B.6.4. Observations concernant les seuils

SEMENOVKER [49] note que les oscillations semblent n'apparaître que pour de faibles valeurs de la fraction volumique de vapeur à la sortie, ce qui signifierait qu'on peut retrouver la stabilité en augmentant la puissance. PULLING et COLLIER [55], sur le même sujet, montrent que l'injection dans le tube chauffant d'un mélange eau-vapeur conduit toujours à un écoulement stable.

Dans un autre ordre d'idées, le laboratoire d'Eindhoven [48] montre que lorsqu'on augmente la puissance au-delà du seuil l'amplitude croît très peu.

#### B. 6.5. Observations concernant les fréquences

Deux remarques importantes émanent de la bibliographie. La première [48] [56] concerne la quasi-identité entre la fréquence naturelle des oscillations amorties observées au voisinage du seuil (mais dans le domaine où le fonctionnement est stable) et la fréquence des oscillations au seuil. La seconde concerne la valeur numérique de la période. Cette valeur est en général de l'ordre de 1 à 10 s (sauf chez WISSLER [24] - cf B.5.2) et est grossièrement de l'ordre de grandeur du temps de présence d'une particule dans le canal, comme pour DAVIDOV [46]. Pour Ramo-Wooldridge [54] elle est proportionnelle à la longueur chauffante en simple phase.

#### B. 6.6. Observations complémentaires

Deux auteurs [48] et [57] montrent expérimentalement que le comportement de l'installation peut être considéré en première approximation comme décrit par un système d'équations linéaires. Ces observations se font en la soumettant, lorsqu'elle est en régime stable, à une perturbation sinusoïdale, de fréquence et d'amplitude données. La linéarité résulte de ce que, d'une part la fréquence du signal émis par l'installation est la même que celle du signal fourni, d'autre part le gain et le déphasage sont sensiblement indépendants de l'amplitude de la perturbation imposée. Cette linéarité n'est qu'approximative : LUMMIS [57] note la présence d'harmoniques de faible amplitude. DAVIDOV [46] observe également ces harmoniques et note que leur amplitude est négligeable à partir du troisième. D'autre part, le gain et le déphasage ne restent pas constants si l'amplitude perturbatrice est trop forte [57]. Néanmoins, cette observation revêt une importance considérable puisque de nombreux calculs théoriques se font sur des systèmes d'équations linéarisées.

#### B.7. AUTRES ETUDES THEORIQUES

Nous n'entrerons pas plus dans les détails qu'au paragraphe précédent. Il en résulterait en effet une compilation d'hypothèses, de simplifications,

de méthodes de calcul sans intérêt pour le but poursuivi ici.

Citons tout d'abord, à titre historique, quatre publications qui se préoccupent du problème le plus général (c'est-à-dire tenant compte de la boucle neutronique) et ne peuvent donc guère faire progresser la compréhension du phénomène. Elles sont souvent citées par les auteurs préoccupés du sujet. La première [58] est l'une des plus anciennes références sur le sujet (1953). Viennent ensuite des travaux du Laboratoire d'Argonne [59] à [61] antérieurs à ceux qui ont été analysés en B.5.1.

Les publications théoriques sur les oscillations sont souvent des présentations de "modèles". Ce mot possède dans la bibliographie un sens plus général que celui que l'on serait tenté de lui donner : pour nous, un modèle est un schéma de la réalité physique, schéma plus ou moins grossier partant d'hypothèses sur le phénomène lui-même. Il se traduit pour l'étude théorique par un système d'équations qui n'est que la conséquence du modèle. Dans la bibliographie, le "modèle" est beaucoup plus souvent un système d'équations établi à partir d'hypothèses générales ne concernant pas directement le phénomène (par exemple : hypothèses sur les pertes de pression, sur la répartition de la vapeur, etc...). Il n'implique donc a priori aucune interprétation physique. Un excellent exemple de ce type de modèle a été donné ci-dessus en B.5.5. par les travaux de MEYER. Cette dualité reflète en fait deux conceptions différentes de la recherche : aux très rares modèles proposés par les chercheurs qui veulent avant tout comprendre, s'opposent ceux des projeteurs qui veulent avant tout calculer.

L'un des premiers, WEIL [62] dans une étude faisant, en 1957, le point du problème de la stabilité des réacteurs "bouillants" insiste sur cette dualité. Il dit la nécessité de modèles très simples pour comprendre, plus compliqués pour prévoir.

B. 7.1. Modèles

\* MARGOLIS et KAPLAN [63] attribuent les oscillations à un couplage entre les deux boucles thermo-hydrodynamique et neutronique. Pour les basses fréquences observées expérimentalement, la boucle neutronique introduit un retard d'environ  $180^\circ$ . Des oscillations deviennent possibles (d'après les auteurs) si l'autre boucle introduit un retard du même ordre. La méthode utilisée est celle des fonctions de transfert. Le calcul conduit bien à des oscillations qui ne sont pas comparées à l'expérience.

\* La thèse de GEORGE [64] est une simple application de la "méthode des équations générales" (cf. B.5.5), les équations aux dérivées partielles non linéarisées étant transformées en équations différentielles (par rapport au temps) aux différences (par rapport à la variable d'espace). Les résultats ne sont pas convainquants (l'auteur dit "not in bad disagreement").

\* Le rapport de RANGLES [65] est l'application du "modèle homogène" du problème des oscillations. On entend par modèle homogène, le traitement des problèmes des écoulements double phase avec l'hypothèse principale que le fluide est homogène et se comporte comme en simple phase. Le "modèle homogène" est mauvais, surtout à basse pression, mais il permet de dégrossir les problèmes lorsqu'on ne dispose pas d'hypothèses plus réalistes.

Les équations établies par RANGLES ne sont pas linéarisées et le calcul numérique donne, dans certains cas, des solutions oscillantes. La comparaison avec l'expérience ne concerne que l'influence qualitative de la section de passage et de la sous-saturation. Elle utilise les résultats de [33]. RANGLES attribue les oscillations à l'effet d'allègement de la colonne montante (cf B.5.1).

\* Dans la même optique que les auteurs du "Kjeller Model" (cf B.5.9) JONES et DIGHT [66] et [67] partant des "équations générales" mettent au point un programme de calcul de plus en plus raffiné à partir d'un système

d'équations linéarisées et de corrélations empiriques . Il manque à ces publications une comparaison avec l'expérience.

\* Dans le cadre de ses travaux déjà cités [52] à [54] [56], la Ramo-Wooldridge [68][69] utilise la technique des fonctions de transfert et applique le critère de NYQUIST à partir des équations générales. Il est tenu compte de l'ensemble des canaux en parallèle d'un réacteur nucléaire. La comparaison avec l'expérience est très limitée.

Les autres modèles que nous citerons sont récents (1964) :

\* Celui de SANATHANAN [70] n'est pas réaliste, car il admet une entrée à saturation. Les équations sont linéarisées.

\* Celui de FEINGOLD et CHAMPLIN [71] est en fait un programme de calcul. La justification des équations ayant servi à l'établissement de ce programme n'est pas donnée.

\* Le modèle de SUO [72] semble être potentiellement intéressant. C'est un schéma de calcul dans lequel les pertes de pression et le chauffage du fluide sont séparés dans l'espace. Il reste toutefois assez éloigné de la réalité physique. Le modèle n'a pas encore été exploité.

\* Une autre tentative intéressante est celle de HUDSON, ATIT et BANKOFF [73]. Elle est malheureusement limitée pour l'instant au cas du canal chauffé sur toute sa longueur et dans lequel le fluide entre à saturation, ce qui est pour les auteurs une étape nécessaire. Comme l'indique le titre, la méthode utilisée est celle des fonctions de transfert. L'approche utilisée est celle des équations générales linéarisées et transformées en équations différentielles aux différences, l'équation de l'énergie étant écrite avec tous ses termes, pour la première fois à notre connaissance. Les auteurs montrent que les termes de cette équation, habituellement négligés (travail des forces de pression, variations

d'énergies potentielle et cinétique), sont effectivement négligeables en grandeur mais changent, tout au moins dans le traitement sur machine électronique, le comportement du système. En effet, les calculs effectués avec l'équation complète traduisent toujours un comportement instable (solutions non bornées). Ce comportement est attribué au couplage introduit entre les trois "équations générales" par les termes conservés et résulterait du calcul numérique mais le problème reste posé. L'équation de l'énergie est ensuite utilisée sous sa forme habituelle. Dans ce cas même, le calcul analogique introduit souvent des instabilités qui sont en fait des limitations du calculateur et n'ont rien à voir avec la solution du problème physique. Après avoir étudié les fonctions de transfert, les auteurs interprètent les résultats sous l'angle propagation de perturbations.

\* Nous rattacherons aux études de modèles le rapport de BAKSTAD [74] publié à propos de la mise au point du "Kjeller model" et qui étudie la légitimité des différentes méthodes utilisées pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations différentielles aux différences. Certaines de ces méthodes sont en effet susceptibles d'introduire des oscillations parasites dans les résolutions numériques (cf. alinéa précédent).

Le problème soulevé par ces deux dernières publications, pour être purement pratique, n'en est pas moins très important et montre avec quelle prudence il faut accepter les conclusions tirées des modèles existants.

#### B. 7.2. Mécanismes proposés

Nous n'insisterons pas sur les mécanismes énumérés en B. 5.1 et B. 5.3 à propos de l'analyse des travaux d'Argonne [20] et de WALLIS [25]. Les plus souvent avancés sont l'effet d'allègement retardé introduit par la colonne montante [65] et le changement de configuration d'écoulement [75] [76]. Remarquons que l'effet d'allègement peut être introduit par le canal chauffant lui-même si la longueur en ébullition est suffisante.

KEMP et al [52] proposent deux mécanismes. Le premier concerne un canal à faible densité superficielle de flux thermique et faible vitesse. Les bulles resteraient attachées à la paroi jusqu'à ce que l'une d'entre elles, se détachant, entraîne les autres. Ce mécanisme est rattaché à celui dit par effet d'allègement. Le second serait basé sur un stockage d'énergie potentielle dans les parois du canal par dilatation sous l'effet d'une onde de pression. KEMP et al ne citent d'ailleurs ce dernier que pour mémoire car il semble que l'effet soit négligeable et la fréquence incompatible avec les fréquences observées expérimentalement.

MARCHAL [77] pense que des effets de choc sonique pourraient expliquer le phénomène d'oscillation. Les vitesses de propagation d'ondes soniques sont en effet très faibles en double phase. Ce sont également à des effets de propagation qu'il est fait appel dans [78] pour tenter d'expliquer les oscillations dans le réacteur V.B.W.R. Les fréquences observées pour ces fluctuations de pression sont de l'ordre de 10 fois la fréquence des oscillations étudiées. D'après [78] cependant le phénomène exciteur pourrait avoir une fréquence nettement supérieure au phénomène résultant qui fait intervenir l'inertie importante d'un circuit hydraulique.

Enfin, DELAYRE et SAUNIER [79] suggèrent un mécanisme basé sur la déformation, en régime transitoire, de la caractéristique interne du canal. Ce mécanisme est en fait un effet de retard. Dans [79] l'explication n'est qu'effleurée, mais l'idée est intéressante.

### B. 7.3. Analyse dimensionnelle

Le nombre de paramètres à prendre en compte pour l'étude du phénomène est considérable. Dans ces conditions, connaissant l'intérêt (et les limitations) de l'analyse dimensionnelle pour rassembler ces paramètres dans des groupements qui, seuls, interviennent, on est surpris de constater que très peu d'auteurs aient tenté cette analyse. Nous citerons à titre historique DAVIDOV [46]. HUDSON et al [73] ont rendu leurs équations adimen-

sionnelles, mais sans se préoccuper semble-t-il des avantages qu'ils pouvaient en tirer.

#### B.8. CONCLUSION

De nombreux renseignements peuvent, nous l'avons vu, être tirés de cette étude bibliographique. Un certain nombre de faits peuvent être considérés comme acquis, mais malgré l'abondance des publications existantes, il est impossible de considérer le problème des oscillations comme résolu. Nous ajouterons qu'il nous paraît souvent mal posé et nous tenterons de montrer pourquoi dans le paragraphe suivant.

Les résultats positifs ne sont pas négligeables : les études expérimentales se recoupent bien et ont mis en évidence des lois qualitatives. Certaines études théoriques contiennent des idées intéressantes, notamment sur les causes possibles. Pour faire progresser la connaissance du phénomène il faut maintenant s'engager dans les voies résolument originales. A titre d'exemple, on peut citer celle adoptée par WEAVER pour le problème le plus complexe, celui de la stabilité en réacteur [80]. Au lieu de chercher à analyser, séparément ou simultanément, les deux boucles de couplage habituelles - (thermo-hydrodynamique et neutronique), l'auteur en ajoute une troisième dont il contrôle les paramètres, de manière à améliorer la stabilité. D'autres études sont en cours pour lesquelles nous n'avons pas encore de résultats détaillés [81][82].

## C - PRESENTATION DE L'ETUDE ENTREPRISE

### C.1. LES FAITS

Etant donné l'abondance de publications de toutes sortes sur le problème des oscillations, il nous a paru indispensable de dégager d'une étude bibliographique extensive l'état actuel de la question avant d'apporter, en connaissance de cause, notre contribution à sa résolution. Cette étude fait également ressortir un certain nombre d'idées directrices.

- Les auteurs, dans leur quasi-totalité, ne se sont préoccupés que de deux cas, courants certes, celui de la convection naturelle et celui de canaux fonctionnant sous différence de pression totale constante. Il resterait à étudier les autres cas (par exemple celui de la convection forcée) ou à montrer que cela n'est pas utile et que le passage d'un cas aux autres est possible sans nouvelles études.
- Sur le plan expérimental, les renseignements déjà réunis sont, sinon complets, du moins suffisamment nombreux pour servir de base à une étude théorique. En général, les recoupements entre les différentes sources sont bons. Nous disposons de plus des résultats d'une étude faite sur place [1].
- Sur le plan théorique, le bilan est moins bon et nous ne disposons d'aucune certitude sur le ou les mécanismes du phénomène. (La meilleure preuve en est le nombre de mécanismes avancés comme possible). Toutefois, un certain nombre de mécanismes sont plausibles, tels ceux dits par effet d'allègement ou par changement de type d'écoulement. Certains cas particuliers ont été

étudiés [25], mais l'étude du cas général reste à faire. Le phénomène expérimental s'accommode en effet de conditions beaucoup moins restrictives (écoulement horizontal, par exemple) que celles adoptées par les auteurs de publications théoriques.

- Enfin, poussés par des raisons pratiques, de nombreux auteurs ont mis au point des "modèles" dont le seul but est la prévision numérique du comportement du système. Du fait de leur complication, ces "modèles" ne permettent d'aboutir à aucune conclusion physique. Leurs comparaisons avec des résultats expérimentaux sont rares et limitées. Quelles que soient les hypothèses adoptées par leurs auteurs, ces modèles conduisent à des comportements oscillatoires. On peut en déduire que ces hypothèses n'ont pas grande influence physique sur le phénomène considéré et que les oscillations sont, pour des écoulements diphasés chauffés, un type de comportement très général. Cette remarque importante est à rapprocher de la conclusion de l'alinéa précédent. La voie des "modèles" de plus en plus complets et raffinés ne peut plus permettre de progresser tant que ne seront pas mieux connues les lois de la mécanique de la double phase. Nous considérons donc les "modèles" existants [22] [32] [42] [66] comme des aboutissements et ne nous engageons pas dans cette voie.
- A côté de ces "modèles" compliqués, des voix se sont élevées pour réclamer l'étude de modèles schématiques, destinés à faire progresser, non la connaissance numérique, mais la compréhension des phénomènes [20] [62]. Nous avons insisté sur ces deux conceptions dans le chapitre précédent (à propos des approches théoriques possibles en B. 2.1 et à propos des modèles en B.7) et nous n'y reviendrons pas, si ce n'est pour remarquer que ces voix ne semblent pas avoir été entendues. L'exemple du Laboratoire d'Argonne qui, après avoir insisté sur la nécessité de modèles schématiques, s'est ensuite consacré à la mise au point de modèles compliqués est caractéristique. WALLIS et HEASLEY [25] sont pratiquement les seuls à s'être lancés efficacement dans cette voie, mais il n'en ont pas épuisé les possibilités.

Compte tenu de ce contexte, il nous est maintenant facile de définir le but de la recherche entreprise.

## C.2. OBJECTIFS DE L'ETUDE

Le but principal sera la définition d'un mécanisme expliquant avec certitude au moins une certaine catégorie de comportements oscillatoires. Ce mécanisme devra être suffisamment général, c'est-à-dire s'appliquer notamment dans les cas particuliers non pris en compte antérieurement (écoulement horizontal, cas de la convection forcée) ou pris en compte par des mécanismes particuliers (cas de [25] où deux mécanismes différents sont appliqués au cas avec et sans colonne montante).

La méthode résulte de la nécessité mise en évidence ci-dessus de recourir à un modèle schématique : elle implique, sinon une idée précise du mécanisme envisagé, du moins des hypothèses sur ce mécanisme. Partant de ces hypothèses, nous définirons un "modèle" schéma le plus simple possible de la réalité physique. Nous nous efforcerons, en particulier, d'éliminer de ce modèle tout ce qui n'est pas lié directement au mécanisme envisagé, afin de faciliter l'interprétation physique des résultats.

Le but principal étant atteint, nous pourrions alors, mais alors seulement, nous intéresser à d'autres problèmes, tel celui de la prévision quantitative. Le modèle initial étant a priori trop schématique pour des calculs quantitatifs, nous serons probablement amenés à compliquer ce modèle pour le rapprocher de la réalité physique. La démarche que nous adoptons est complémentaire de celle qui est suivie habituellement : au lieu de partir des "équations générales" et de les simplifier pour pouvoir poursuivre les calculs, nous partons d'un modèle simple qu'il sera nécessaire de compliquer pour obtenir des résultats quantitatifs. L'aboutissement, de ce point de vue, sera le même mais nous aurons recueilli au passage des renseignements sur le phénomène inaccessibles autrement.

### C.3. DEFINITION DE QUELQUES MODELES

#### C.3.1. Modèle monophasé

Un des aspects frappants de l'ébullition est la variation rapide de la masse spécifique avec l'enthalpie, variation que nous appellerons "effet de densité". Dans un fluide en écoulement, cet "effet de densité" se traduit par des accélérations considérables, dont on peut attendre des effets dynamiques importants pendant les régimes variables. L'hypothèse ayant conduit à l'établissement de notre premier modèle est que l'"effet de densité", par un mécanisme à élucider, est la cause du comportement oscillatoire. Nous utilisons, pour fonder cette hypothèse, les résultats connus et notamment ceux de WISSLER [23] et de QUANDT [26] qui ont lié l'apparition des oscillations à une valeur suffisante de la dérivée de la masse spécifique par rapport à l'enthalpie. A cet effet de densité se rattachent des mécanismes proposés antérieurement comme celui dit par effet d'allègement, mais il est plus général (il joue, par exemple, en écoulement horizontal). L'effet de densité est d'autant plus important que la pression est plus basse, ce qui est en accord avec l'influence expérimentale de cette pression.

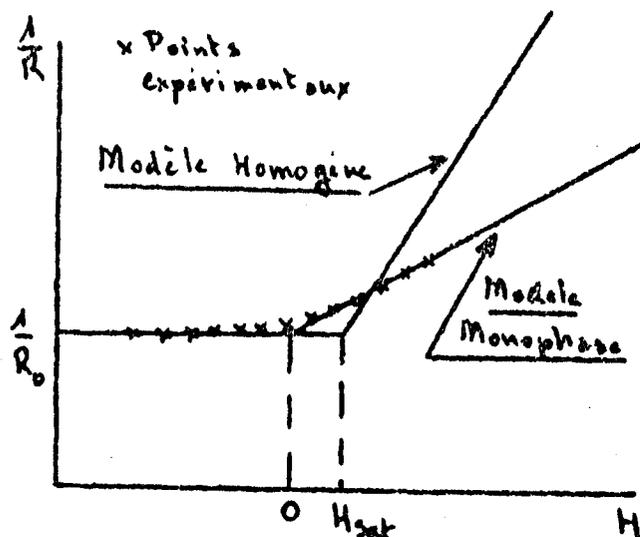
Eliminant, dans la réalité physique, tout ce qui n'est pas lié directement à l'"effet de densité", nous définissons un "modèle monophasé" dans lequel le fluide étudié est en simple phase puisqu'il n'est évidemment pas nécessaire d'avoir deux phases pour que la masse spécifique soit fonction de l'enthalpie. Les propriétés physiques du fluide (autres que la masse spécifique) sont des constantes. Les conditions aux limites thermiques et hydrodynamiques énumérées en A. 2.1 sont prises les plus simples possibles : enthalpie à l'entrée et densité volumique de puissance constantes, pression et différence de pression entre entrée et sortie constantes. Cette dernière condition pourra d'ailleurs facilement être remplacé par une autre (convection naturelle ou forcée, etc...). La conduite dans laquelle circule le fluide est chauffée sur une partie de sa longueur, l'évolution du fluide sur les tronçons non chauffés étant supposée adiabatique.

Le modèle monophasé ainsi défini est un modèle homogène mais il n'est pas le modèle homogène classique décrit en B.7.1. Il en est différent sur le plan philosophique mais aussi sur le plan pratique.

Sur le plan philosophique, la différence provient de la manière dont le modèle est défini. Au lieu d'admettre que les écoulements diphasés se comportent comme si le fluide était homogène, ce qui est faux, nous admettons que pour les oscillations la loi physique fondamentale est la loi reliant masse spécifique et enthalpie. Pour les oscillations, l'accord éventuel du modèle homogène avec l'expérience ne pourrait que montrer le peu d'influence des phénomènes négligés (glissement, lois du frottement etc.). L'accord éventuel du modèle monophasé avec l'expérience montrera que l'effet de densité est la cause essentielle du comportement oscillatoire.

Sur le plan pratique, le recours à un fluide fictif nous laisse beaucoup plus de liberté que dans le modèle homogène. Il nous permet notamment d'adopter une loi de densité plus réaliste.

Dans le modèle homogène (schéma ci-contre), cette loi est imposée; le volume spécifique est constant jusqu'à apparition de l'ébullition franche; il croît ensuite de façon linéaire avec une pente imposée par le fait que le glissement est obligatoirement égal à l'unité. Dans la réalité, le volume spécifique augmente dès l'apparition de l'ébullition locale et la loi qu'il suit n'est qu'approximativement linéaire (cf. Annexe XII).



La pente moyenne est plus faible dès qu'il y a glissement. Anticipant sur la seconde partie de cette étude, nous verrons que la seule condition imposée au volume spécifique dans le modèle monophasé est de rester constant tant que l'enthalpie est "négative" et de varier linéairement avec l'enthalpie dès que celle-ci est "positive".

Dès lors, par un simple changement de l'origine des enthalpie et de la valeur de la pente, c'est-à-dire en fait de l'enthalpie caractéristique  $H_c$ , le modèle monophasé permet la prise en compte approximative des effets de l'ébullition locale et du glissement sur la loi de densité (cf. Annexes XII et XIII).

Il n'y a pas contradiction entre cette prise en compte et l'introduction, dans les équations autres que l'équation d'état, d'une vitesse unique (donc ne tenant pas compte du phénomène de glissement). En effet, nous étudions dans le modèle monophasé l'évolution d'un fluide fictif, dont la vitesse est effectivement bien définie (l'écoulement est considéré comme monodimensionnel) et qui n'est finalement soumis qu'aux seules conditions suivantes:

- avoir, à l'entrée, la même vitesse que le liquide réel (simple phase à cet endroit)
- avoir, en tous points, la même loi de volume massique que le fluide réel (ou du moins la loi linéaire la plus proche possible de la loi réelle).

La référence à un modèle homogène se rapportant toujours, dans la bibliographie, explicitement ou implicitement, au modèle homogène défini en B.7.1 et compte tenu des différences fondamentales entre ce modèle et le modèle monophasé, nous avons tenu à conserver un nom distinct à notre modèle.

### C. 3.2. Modèle à propagation

On sait le rôle important joué dans les oscillateurs classiques par les retards. De nombreux auteurs ont insisté sur la présence de ces retards dans la boucle thermo-hydrodynamique représentant le système étudié et il est séduisant d'attribuer les oscillations dans ce système à un effet de retard ou, ce qui revient au même, de temps de propagation.

Remarquons tout d'abord que ce phénomène de propagation est présent dans le modèle monophasé. C'est physiquement évident (une perturbation à l'entrée ne réalise son plein effet à la sortie qu'au bout d'un certain temps). Nous verrons d'ailleurs que l'effet de densité n'est moteur d'oscillations que par l'intermédiaire de termes retardés. Nous avons cependant tenté l'étude directe d'un modèle à propagation, dans lequel nous supposons que les "informations" arrivant à l'amont de la zone double phase se propageaient dans celle-ci avec une certaine vitesse. Poussant un peu plus loin l'analyse, on constate qu'en fait le phénomène de propagation est lui-même fort compliqué [83] et que l'effet en un point d'une perturbation à l'entrée se décompose en deux parties : un effet primaire qui peut être considéré comme se propageant et un effet secondaire, résultat de l'intégration sur la zone double phase de l'effet primaire. Dans ces conditions, le modèle devient trop compliqué et conformément à l'esprit dans lequel cette étude est faite, nous avons renoncé.

### C. 3.3. Modèle à changement de configuration d'écoulement

Un troisième phénomène apparaissant comme cause plausible des oscillations est le changement de configuration d'écoulement, souvent cité dans le chapitre précédent. Sur installation transparente, on observe en effet [1] de profondes modifications de l'écoulement au cours du cycle. Le mécanisme pourrait être le suivant, la transition entre les configurations a et b se faisant pour une qualité donnée  $x_c$  :

Lorsque, augmentant la puissance, on atteint la qualité  $x_c$  à la sortie, la configuration en ce point passe du type a au type b. Dans la zone aval non chauffée, si la perte de pression avec la configuration b est inférieure à celle qui existait avec la configuration a, le débit tend à augmenter. S'il augmente suffisamment pour que la qualité à la sortie du tronçon chauffant redevienne inférieure à  $x_c$ , des oscillations entretenues apparaissent.

Remarquons que ces oscillations ne sont pas de même nature que dans le cas des modèles précédents. Le mécanisme en cause ici est un mécanisme de relaxation, qui pourrait expliquer des oscillations d'allure nettement non sinusoïdale (phénomène non linéaire) et possédant une amplitude finie dès leurs apparitions. Ceci n'étant pas le cas général, le mécanisme en question n'est pas toujours valable. A notre avis, il joue réellement dans certains cas et nous ne l'avons laissé de côté qu'en raison du succès rencontré par le modèle monophasé. Les types différents d'oscillations rencontrés par différents expérimentateurs dont [1] peuvent correspondre logiquement à des mécanismes différents.

Il a été montré par ailleurs [84] que lorsque la zone de transition entre les deux configurations d'écoulement ne franchit pas la sortie de la zone chauffante, l'écoulement est stable. Des oscillations éventuelles sont donc liées à ce franchissement et le mécanisme ne peut être que celui décrit ci-dessus.

#### C. 4. CONCLUSION

Cette première partie nous a permis, par un survol des problèmes thermo-hydrodynamiques posés par les fluides s'écoulant avec changement de phase dans des conduites chauffées, puis par une étude bibliographique, de fixer le contexte et définir une méthode pour l'étude théorique du problème qui nous intéresse ici, celui des oscillations.

La compréhension du mécanisme de ces oscillations ne peut être atteinte que par l'étude de modèles très schématiques construits "autour" d'une hypothèse physique.

Deux modèles dits "monophasé" et à "changement de configuration d'écoulement" sont proposés dans ce but. Certains types d'oscillations doivent a priori relever plutôt du mécanisme à changement de configuration d'écoulement, mais le modèle monophasé ayant une portée plus générale c'est à lui que nous consacrerons la suite de cette étude.

## Deuxième partie

### MODELE MONOPHASE

#### CHAPITRE I

#### EQUATIONS GENERALES

##### 1.1. DEFINITION

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici la définition du modèle monophasé, définition dont la justification est donnée dans la première partie de cette étude.

On étudie l'écoulement monodimensionnel d'un fluide fictif, dont la masse spécifique n'est fonction que de l'enthalpie, cette fonction étant explicitée ci-dessous § 1.2.1.

Ce fluide s'écoule dans une conduite cylindrique <sup>1)</sup> sous l'effet d'une différence de pression constante entre l'entrée et la sortie de cette conduite.

L'enthalpie d'entrée et les propriétés physiques du fluide autres que la masse spécifique sont des constantes.

Le fluide est chauffé, à densité volumique de flux de chaleur constante sur un tronçon de la conduite. Sur les autres tronçons, l'évolution du fluide est adiabatique.

La figure 1 donne une représentation schématique de la définition ci-dessus et précise les notations.

L'annexe 1 étudie la possibilité d'introduire des "singularités" sur la conduite (diaphragmes, pertes de charge singulières, changements d'inclinaison, de rugosité ou de section), problème important en pratique mais qui ne change pas les principes du calcul.

---

1) Cylindrique est pris ici dans son sens mathématique de surface engendrée par une droite se déplaçant parallèlement à elle-même, sur une courbe fermée.

Les conventions de signe sont les suivantes :

L'abscisse  $Z$ , dont l'origine est l'entrée de la section chauffante, est comptée le long de la conduite positivement dans le sens de la vitesse initiale  $U_0(0)$  qui est donc essentiellement positive. Ceci permet d'écrire en  $U^2$  le terme de perte de pression par frottement. A cause de ce terme, on s'interdit de considérer les cas où la vitesse à l'entrée  $U_0(T)$  change de signe lorsque le temps  $T$  croît, mais on verra dans la suite que cela n'est pas gênant.

L'angle  $\varphi$  de l'axe de la conduite avec le plan horizontal est positif si la force de pesanteur s'oppose à l'écoulement (ce qui est le cas général en double phase), négatif dans le cas contraire.

La différence de pression motrice  $\Delta P$  est la différence entre la pression d'entrée et la pression de sortie.

## 1.2. EQUATIONS DIMENSIONNELLES <sup>1)</sup>

1.2.0. Le problème posé consiste en la détermination des quatre fonctions suivantes de l'abscisse  $Z$  (mesurées le long de la conduite) et du temps  $T$  :

- enthalpie  $H$
- masse spécifique  $R$
- vitesse  $U$
- pression  $P$ .

Ces quatre grandeurs définissent en effet parfaitement le fluide.

Les quatre équations correspondantes sont les équations utilisées habituellement en mécanique des fluides à savoir :

- équation d'état du fluide
- équation de continuité
- équation de l'énergie
- équation de la dynamique.

---

1) Rappelons qu'en principe les notations en majuscules sont réservées aux grandeurs et les notations en minuscules aux paramètres adimensionnels correspondants.

Par hypothèse, nous négligeons dans l'équation de l'énergie les termes relatifs à la dissipation (frottement) et au travail des forces de pression.

Cette hypothèse est commune à tous les auteurs. Elle se justifie par le fait que ces termes sont en général très faibles devant la puissance de chauffage.

#### 1.2.1. Equation d'état

Par définition du modèle, elle est simplement :  $R = R(H)$ .

Il faut cependant que cette loi soit voisine de la réalité physique schématisée et qu'elle ait, si possible, une forme analytique simple. Pour un mélange eau-vapeur à glissement constant, la masse spécifique moyenne (définie ici comme étant la masse présente dans l'unité de volume) est une fonction hyperbolique de la qualité, donc de l'enthalpie. On trouvera dans l'annexe XII une démonstration de ce fait, d'ailleurs bien connu.

Comme de plus une forme hyperbolique bien choisie simplifie remarquablement les calculs (voir ci-dessous § 1.3.) nous adopterons, en plaçant l'origine des enthalpies à un point qui correspondrait pour la double phase au liquide saturé,

$$\begin{array}{l} \boxed{R = R_0 \text{ pour } H \leq 0} \\ \boxed{R = \frac{H_c R_0}{H + H_c} \text{ pour } H \geq 0} \end{array} \quad (\text{I-1})$$

où  $R_0$  et  $H_c$  sont des constantes.

L'enthalpie d'entrée sera  $-H_0 \leq 0$  (avec une enthalpie d'entrée positive, on peut facilement se ramener au cas  $H_0 = 0$  en changeant l'origine des enthalpies. Les valeurs numériques de  $R_0$  et  $H_c$  changent alors dans (I-1)).

Si l'enthalpie augmente indéfiniment la masse spécifique  $R$  tend vers zéro.

Ceci n'est pas gênant, car le phénomène étudié apparaît en général pour des qualités modérées où la forme de l'hyperbole est encore peu affectée par l'ordonnée de l'asymptote horizontale. De plus, pour des pressions modérées, la densité de la vapeur par rapport à l'eau est faible devant l'unité (elle n'atteint 0,1 qu'au voisinage de 115 kgf/cm<sup>2</sup>).

$H_c$  est la valeur de l'enthalpie pour laquelle  $R = \frac{R_0}{2}$ . Pour des mélanges eau-vapeur, cette valeur  $\frac{R_0}{2}$  correspond à une certaine qualité. Il en résulte que, toutes choses égales par ailleurs,  $H_c$  est proportionnelle à la chaleur latente de vaporisation. Cette remarque nous sera utile pour l'interprétation physique des paramètres adimensionnels.

On vérifie, en annexe II, que l'écoulement est stable si la masse spécifique est une constante  $R_0$ , ceci pour être certain qu'une oscillation éventuelle est liée à la forme (I-1).

#### 1.2.2. Equation de continuité

Elle s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial R}{\partial T} + \frac{\partial (RU)}{\partial Z} = 0} \quad (I-2)$$

#### 1.2.3. Equation de l'énergie

Compte tenu des hypothèses adoptées ci-dessus (§ 1.2.0) et en appelant  $W$  la densité volumique de flux de chaleur (positive par définition), elle s'écrit :

$$\frac{\partial (RH)}{\partial T} + \frac{\partial (RUH)}{\partial Z} = W$$

soit, compte tenu de (I-2) :

$$\boxed{R \frac{\partial H}{\partial T} + RU \frac{\partial H}{\partial Z} = W} \quad (\text{I-3})$$

Dans les zones adiabatiques  $W = 0$ .

#### 1.2.4. Equation de la dynamique

$G$  étant l'accélération de la pesanteur,  $\varphi$  l'angle de la conduite avec le plan horizontal (on peut généraliser  $G$  et  $\varphi$  lorsque le système est plongé dans un champ autre que celui de pesanteur),  $D$  le diamètre hydraulique et  $\Lambda$  le coefficient de Darcy, elle s'écrit sur chaque tronçon de section constante :

$$- \frac{\partial P}{\partial Z} = R \frac{\partial U}{\partial T} + RU \frac{\partial U}{\partial Z} + R G \sin \varphi + \frac{\Lambda RU^2}{2D} \quad (\text{I-4})$$

Le coefficient de frottement de Darcy  $\Lambda$  est faiblement fonction du nombre de Reynolds. Etant donné, d'une part la schématisation du modèle et, d'autre part la simplification obtenue, nous admettrons que  $\Lambda$  est une constante.

D'après la définition du modèle, la pression n'est pas un paramètre, toutes les propriétés physiques du fluide en étant indépendantes. Le seul paramètre de pression est la différence de pression entre les deux extrémités du canal et nous appellerons  $\Delta P$  la différence entre les pressions d'entrée et de sortie.

L'équation de la dynamique n'intervient plus alors que comme condition aux limites, sous forme intégrée :

$$\boxed{\Delta P = - \int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} \frac{\partial P}{\partial Z} dz = \int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} \left[ \frac{\partial U}{\partial T} + U \frac{\partial U}{\partial Z} + G \sin \varphi + \frac{\Lambda U^2}{2D} \right] Rdz} \quad (\text{I-5})$$

### 1.2.5. Conditions aux limites et initiales

Nous nous imposons l'enthalpie d'entrée -  $H_0$ . Une autre condition aux limites est donnée par (I.5).

Comme conditions initiales, nous prendrons le régime permanent ou un état voisin.

### 1.3. MISE EN FORME DU SYSTEME D'EQUATIONS

On peut remplacer le système établi au paragraphe précédent par un système plus simple en combinant (I-1), (I-2), et (I-3).

L'équation de continuité (I-2) s'écrit, compte tenu de l'équation d'état (I-1) :  $R = R(H)$

$$\frac{dR}{dH} \left[ \frac{\partial H}{\partial T} + U \frac{\partial H}{\partial Z} \right] + R \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

Introduisant maintenant l'équation de l'énergie (I.3), il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = - \frac{W}{R^2} \frac{dR}{dH} = W \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dH}$$

On voit apparaître l'énorme avantage de la fonction retenue pour  $R(H)$  : la forme hyperbolique rend constant le second membre de l'équation précédente. Dimensionnellement, ce second membre est l'inverse d'un temps. Nous poserons :

$$\frac{1}{\Theta} = W \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dH} \quad (I-6)$$

Dans les zones adiabatiques et la zone chauffante à enthalpie négative ( $H < 0$ ), le temps  $\Theta$  tend vers l'infini.

Dans la zone chauffante à enthalpie positive ( $H > 0$ ), zone qui joue un rôle fondamental dans le modèle monophasé, l'équation (I-6) montre que  $\Theta = \Theta_c$  avec :

$$\Theta_c = \frac{H_c R_0}{W} \quad (I-7)$$

Cette valeur  $\Theta_c$  de  $\Theta$  est un temps caractéristique du système.

Finalement, l'équation de continuité (I-1) peut être remplacée par :

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{\Theta} \quad (\text{I-8})$$

et le système à trois inconnues H,R,U, que nous utiliserons pour la suite de cette étude se compose de :

- deux équations aux dérivées partielles

. continuité :  $\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{1}{\Theta} \quad (\text{I-8})$

. énergie :  $R \frac{\partial H}{\partial T} + RU \frac{\partial H}{\partial Z} = W \quad (\text{I-3})$

- deux relations finies

. équation d'état  $\left\{ \begin{array}{l} R = R_0 \quad \text{pour } H \leq 0 \\ R = \frac{H_c R_0}{H + H_c} \quad \text{pour } H \geq 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-1})$

. et équation de définition de

$$\frac{1}{\Theta} = W \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dH} \quad (\text{I-6})$$

- deux conditions aux limites

. l'une transformée de (I-5), compte tenu de (I-8) :

$$P = \int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} \left[ \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{U}{\Theta} + G \sin \varphi + \frac{\Delta U^2}{2D} \right] RdZ \quad (\text{I-9})$$

. l'autre  $H_{\text{entrée}} = -H_0$

- une condition initiale (régime permanent ou un état voisin).

Dans la zone où  $O$  est fini ( $\theta \neq \theta_c$ ) on a de plus intérêt à remplacer (I-3) par l'équation obtenue en éliminant  $H$  entre (I-1) et (I-3), de manière à ce que les équations aux dérivées partielles ne contiennent que deux des fonctions inconnues  $R$  et  $U$ .

Il vient facilement :

$$\frac{1}{R} \left[ \frac{\partial R}{\partial T} + U \frac{\partial R}{\partial Z} \right] = - \frac{1}{\theta_c} \quad (\text{I-3}')$$

#### 1.4. ANALYSE DIMENSIONNELLE

Malgré sa schématisation poussée, le modèle monophasé introduit un nombre important de paramètres figurant dans le système précédent :

- les paramètres de géométrie : diamètre hydraulique  $D$ , coefficient de frottement  $\Lambda$ , inclinaison  $\varphi$ , longueurs des différents tronçons de la conduite ( $L_0$ ,  $L_c$ ,  $L_1$  respectivement longueur adiabatique amont, longueur chauffante et longueur adiabatique aval) ;
- les propriétés physiques : valeurs de  $R_0$  et de  $H_c$  ;
- l'accélération de la pesanteur  $G$  ;
- les paramètres de fonctionnement :
  - . vitesse en régime permanent ou valeur de  $\Delta P$
  - . enthalpie d'entrée -  $H_0$
  - . puissance volumique  $W$ .

Soit douze paramètres (compte non tenu de singularités éventuelles : cf. annexe I).

L'intérêt de l'analyse dimensionnelle est de permettre de réduire le nombre de paramètres en les combinant dans des groupements qui, seuls, interviennent.

Pour mettre le système précédent sous forme adimensionnelle, il faut choisir trois grandeurs indépendantes de base et une valeur caracté-

ristique pour chacune de ces grandeurs. Ce choix doit être fait d'après l'importance de ces grandeurs dans le système d'équations.

L'une de ces grandeurs s'introduit pratiquement spontanément : c'est le temps avec comme valeur caractéristique  $\Theta_c$  donnée par (I-7).

La condition aux limites (I-9) est importante et l'expression sous le signe  $\int$  comporte en facteur la masse spécifique  $R$  dont une valeur caractéristique évidente est  $R_0$ .

Enfin, l'intégration de (I-9) sur la longueur de la conduite suggère de prendre comme troisième grandeur de base une longueur.

Examinons rapidement la possibilité de retenir une autre grandeur comme grandeur de base :

- vitesse : elle n'apparaît pas symétriquement dans (I-9) et la valeur caractéristique possible (vitesse de régime permanent à l'entrée) n'apparaît pas simplement dans le système.
- Accélération : n'apparaît que dans (I-9) et d'une manière dissymétrique.
- Différence de pression : on sera amené dans la suite à décomposer la vitesse en deux parties : le régime permanent et une perturbation. Dans ces conditions (I-9) peut être réécrite et  $\Delta P$  disparaît : ce n'est donc pas un paramètre pouvant servir de grandeur de base.
- Densité de puissance : elle entre déjà dans  $\Theta$  et n'intervient pas dans la région à  $R$  variable où (I-3') remplace (I-3).
- Enthalpie : malgré l'apparence (définition du modèle), l'enthalpie n'est pas une grandeur très importante car dans la zone à  $R$  variable elle disparaît du système, (I-3') remplaçant (I-3) et (I-1) ne servant plus qu'au calcul de cette enthalpie.

Le choix initial semble finalement le meilleur pour le modèle considéré. Nous verrons par la suite que si la correspondance est facile

à établir entre nos paramètres adimensionnels et ceux de l'étude expérimentale [1], ce ne sont cependant pas exactement les mêmes. Ceci est parfaitement logique et nous y reviendrons en temps voulu. Il nous reste à choisir une longueur caractéristique. Plusieurs sont en effet possibles.

Les longueurs des tronçons adiabatiques  $L_0$  et  $L_1$  sont à éliminer parce que la zone "motrice" est la zone chauffante.

Le diamètre hydraulique  $D$  n'intervient que par l'intermédiaire du terme de frottement dans (I-9). On pourrait penser prendre la longueur sur laquelle la masse spécifique  $R$  est effectivement en régime permanent, fonction de l'enthalpie  $H$  (longueur équivalente à la "longueur bouillante" en double phase), mais le fait qu'elle dépende des paramètres de fonctionnement compliquerait énormément l'exploitation du modèle (les paramètres de géométrie d'une installation donnée deviendraient des paramètres de fonctionnement).

La seule option logique est d'adopter  $L_c$  (longueur chauffante).

Finalement, les grandeurs indépendantes de base et les valeurs caractéristiques correspondantes retenues sont :

- la longueur et  $L_c$  (longueur chauffante)
- la masse spécifique et  $R_0$  (masse spécifique à l'entrée)
- le temps et  $\Theta_c$  (définition donnée au § 1-3.)

Utilisant les équations aux dimensions, nous poserons :

- . abscisse réduite :

$$z = \frac{Z}{L_c}$$

- . longueur réduite :

$$l_i = \frac{L_i}{L_c} \quad (i = 0 \text{ ou } 1)$$

- . masse spécifique réduite :

$$\rho = \frac{R}{R_0}$$

. temps réduit :

$$t = \frac{T}{\Theta_c} = \frac{TW}{H_c R_o}$$

. vitesse réduite :

$$u = \frac{U \Theta_c}{L_c} = \frac{U H_c R_o}{W L_c}$$

. gravité réduite :

$$g = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2}{L_c} = \frac{G (H_c R_o)^2 \sin \varphi}{W^2 L_c}$$

. paramètre de frottement réduit :

$$f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D}$$

. différence de pression réduite :

$$\Delta p = \frac{\Delta P \Theta_c^2}{R_o L_c^2} = \frac{\Delta P R_o H_c^2}{W^2 L_c^2}$$

Sans pour autant impliquer l'équivalence entre quantité de chaleur et énergie, nous définirons de même :

. densité volumique de puissance réduite :

$$w = \frac{W \Theta_c^3}{R_o L_c^2} = \frac{R_o^2 H_c^3}{W^2 L_c^2}$$

. enthalpie réduite :

$$h = \frac{H \Theta_c^2}{L_c^2} = H \frac{(H_c R_o)^2}{(W L_c)^2}$$

### 1.5. EQUATIONS ADIMENSIONNELLES DU MODELE MONOPHASE

Elles se déduisent immédiatement du système d'équations donné au paragraphe 1.3.

Pour les trois inconnues  $\rho$ ,  $u$  et  $h$  on dispose,  $\theta$  étant donné par :

$$\frac{1}{\theta} = w \frac{d \frac{1}{\rho}}{dh} \quad (\text{I-10})$$

des équations suivantes données sous la forme de tableau pour  $\theta$  fini ( $\theta = 1$ ) et  $\theta \rightarrow \infty$ .

|   | <u>Zone où <math>\theta = 1</math></u>   | <u>Zone où <math>\theta \rightarrow \infty</math></u>   |        |
|---|--|---|--------|
| <u>Deux équations aux dérivées partielles</u> |  |   |        |
| (continuité)                                  | $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$  | $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$   | (I-11) |
| (énergie)                                     | $\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = -1$   | $\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho u \frac{\partial h}{\partial z} = w$   | (I-12) |
| <u>Une relation finie</u>                     |  |   |        |
| (état)  | $\left\{ \begin{array}{l} (h < 0 \text{ est impossible dans cette zone}) \\ \rho = \frac{h_c}{h + h_c} \text{ pour } h \geq 0 \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 \text{ pour } h \leq 0 \\ \rho = \frac{h_c}{h + h_c} \text{ pour } h \geq 0 \end{array} \right.$ | (L-13) |
| <u>Deux conditions aux limites</u>            |  |   |        |
| (dynamique)                                   | $\Delta p = \int_{-l_0}^{l+l_1} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta} + g + f u^2 \right] \rho dz$                               |   | (I-14) |
| (entrée)                                      | $h = -h_0$   |   | (I-15) |
| <u>Une condition initiale</u>                 |  |   |        |
|   | (non exprimée pour l'instant)  |   | (I-16) |

Il ne reste que huit paramètres au lieu de 12 :

- 3 paramètres de géométrie  $f, l_0, l_1$
- 4 paramètres combinés (propriétés physiques, géométrie, fonctionnement)  $h_c, \Delta p, h_0, w$
- 1 paramètre combiné (gravité, propriétés physiques, géométrie, fonctionnement)  $g$ .

### 1.6. RESOLUTION PARTIELLE

Le système (I-11), (I-12), (I-13) est particulièrement simple.

#### 1.6.1. Zone adiabatique amont

Dans cette zone  $w = 0$   $\theta \rightarrow \infty$ .

(I-11) donne  $u = u(t)$  indépendant de  $z$ .

Nous pouvons poser  $u = u_0(t)$ , l'indice 0 étant ici relatif à  $z = 0$ .

(I-12) s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{Dh}{Dt} = 0$$

le symbole D signifiant que nous dérivons en suivant la particule (variables de LAGRANGE).

Compte tenu de (I-15) et (I-13), on retrouve évidemment  $h = -h_0$ .

Finalement pour cette zone :

$$\begin{array}{l} u = u_0(t) \\ \rho = 1 \\ h = -h_0 \end{array} \quad \text{(I-17)}$$

#### 1.6.2. Zone chauffante à $h \leq 0$ (masse spécifique constante)

Dans cette zone  $w > 0$   $\theta \rightarrow \infty$

(I-11) donne toujours  $u = u_0(t)$

(I-12) donne cette fois  $\frac{Dh}{Dt} = \frac{w}{\rho} = w$  compte tenu de (I-13).

En suivant la particule  $h = wt + \text{constante}$ .

Nous désignerons par  $\tau$  l'instant où la particule considérée atteint l'enthalpie 0. Il vient :  $h = w(t - \tau)$ .

Comme ci-dessus, nous utiliserons fréquemment dans la suite les variables de Lagrange, lesquelles mettent en évidence la relation biunivoque existant entre  $\tau$  et une particule. Nous aurons notamment à nous servir du fait que deux quelconques des trois variables  $z$ ,  $t$ ,  $\tau$  définissent parfaitement une particule et sont donc liées par une relation.

L'instant  $t_0$  où la particule est passée par l'origine des abscisses, qui est également celui de cette zone chauffante, est donné par :

$$-h_0 = w (t_0 - \tau)$$

soit :

$$t_0 = \tau - \frac{h_0}{w}$$

et la relation cherchée liant  $z$ ,  $t$  et  $\tau$  est alors :

$$z = \int_{\tau - \frac{h_0}{w}}^t u_0(x) dx$$

$x$  étant une variable d'intégration.

Il reste à calculer la longueur de cette zone où  $h \leq 0$ , longueur que nous désignerons par  $\lambda$ . Par définition de  $\tau$  c'est la valeur de l'intégrale précédente pour  $t = \tau$  :

$$\lambda(t) = \int_{\tau - \frac{h_0}{w}}^t u_0(x) dx$$

Nous poserons :  $s = \frac{h_0}{w}$

Revenant pour un instant aux grandeurs dimensionnelles, on voit que  $s = \frac{H_0}{H_c}$  que nous appellerons, par analogie avec la double phase où  $H_0$  représenterait une sous-saturation, paramètre adimensionnel de sous-saturation.

On sait (annexe II) que si  $\lambda \geq 1$ ,  $\rho = 1$  dans toute la conduite d'après (I-18) et l'écoulement est stable. Ceci correspond au cas où la puissance n'est pas suffisante pour que l'enthalpie s'annule avant la sortie du canal.

Il faut, pour que le problème ait de l'intérêt, que  $\lambda < 1$ .

Les formules relatives à cette zone sont réunies ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
 u = u_0(t) \\
 \rho = 1 \\
 h = w(t - \tau) \\
 \lambda(t) = \int_{t-s}^t u_0(x) dx \\
 z(t, \tau) = \int_{\tau-s}^t u_0(x) dx \\
 \lambda < 1 \\
 \tau - s \leq t \leq \tau
 \end{array}
 \tag{I-18}$$

### 1.6.3. Zone chauffante à $h \geq 0$

Dans cette zone  $\theta = 1$ ,  $w$  est positif mais n'intervient plus directement dans le système.

(I-11) donne cette fois  $u(z, t) = u(t) + z$

D'après (I-18) à l'instant  $t$  pour  $z = \lambda(t)$  (frontière interzones) :

$$u[\lambda(t), t] = u(t) + \lambda(t) = u_0(t)$$

Donc :

$$u(z, t) = u_0(t) + z - \lambda(t)$$

(I-12) donne :

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = \frac{D (\text{Log } \rho)}{Dt} = -1$$

et, compte tenu du fait que  $\rho = 1$  pour  $t = \tau$ , par définition de  $\tau$  :

$$\rho = e^{-(t-\tau)} \quad \text{avec } t \geq \tau$$

h est donné par (I-13).

La relation liant  $z$ ,  $t$  et  $\tau$  dans cette zone sera donnée par l'intégration de :

$$\frac{Dz}{Dt} = u(z, t) = u_0(t) + z - \lambda(t)$$

Prenons provisoirement  $t$  et  $\tau$  comme variables indépendantes définissant la particule. La présence de  $z$  dans le second membre nous incite à poser :

$$z(t, \tau) = y(t, \tau) e^t$$

$\frac{Dz}{Dt}$  est la dérivée en suivant la particule, donc à  $\tau$  constant

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} e^t + y e^t$$

et, en reportant dans l'équation ci-dessus :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = e^{-t} [u_0(t) - \lambda(t)]$$

Compte tenu du fait que  $z(t, \tau) = \lambda(\tau)$  pour  $t = \tau$ , il vient :

$$y(t, \tau) = \lambda(\tau) e^{-\tau} + \int_{\tau}^t e^{-x} [u_0(x) - \lambda(x)] dx$$

$$z(t, \tau) = \lambda(\tau) e^{t-\tau} + e^t \int_{\tau}^t e^{-x} [u_0(x) - \lambda(x)] dx$$

L'instant  $t_1$  où la particule quitte la zone chauffante est donné par cette formule pour  $z = 1$ . Les formules relatives à cette zone sont réunies ci-dessous :

$$u = u_0(t) - \lambda(t) + z$$

$$\rho = e^{-(t-\tau)}$$

$$\rho = \frac{h_c}{h + h_c}$$

$$z(t, \tau) = \lambda(\tau) e^{t-\tau} + e^t \int_{\tau}^t e^{-x} [u_0(x) - \lambda(x)] dx$$

(I-19)

$$\tau \leq t \leq t_1(\tau) \text{ avec :}$$

$$1 = \lambda(\tau) e^{t_1-\tau} + e^{t_1} \int_{\tau}^{t_1} e^{-x} [u_0(x) - \lambda(x)] dx$$

#### 1.6.4. Zone adiabatique aval

Dans cette zone  $w = 0$   $\theta \rightarrow \infty$

(I-11), compte tenu de (I-19), donne :

$$u = u(t) = u_0(t) - \lambda(t) + 1$$

(I-12) donne  $\frac{Dh}{Dt} = 0$  en suivant la particule, donc à  $\tau$  donné  $h = \text{constante}$ , et d'après (I-19) :

$$\rho = \text{constante} = \rho(\tau) = e^{-(t_1-\tau)}$$

La relation liant  $z$ ,  $t$  et  $\tau$  est donnée par l'intégration de

$$\frac{Dz}{Dt} = u = u_0(t) - \lambda(t) + 1$$

donc :

$$z = 1 + \int_{t_1}^t [u_0(x) - \lambda(x) + 1] dx$$

puisque  $z = 1$  pour  $t = t_1$ .

Les formules relatives à cette zone sont :

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(t) - \lambda(t) + 1 \\
 \rho &= e^{-(t_1 - \tau)} \\
 \rho &= \frac{h_c}{h + h_c} \\
 z(t, \tau) &= 1 + \int_{t_1}^t [u_0(x) - \lambda(x) + 1] dx \\
 t_1 &\leq t \leq \text{instant de sortie}
 \end{aligned}
 \tag{I-20}$$

#### 1.6.5. Remarques

Ayant remplacé le système différentiel (I-11), (I-12), (I-13), compte tenu de (I-15), par les équations intégrées dans chaque zone (I-17), (I-18), (I-19), (I-20), on peut noter plusieurs caractéristiques intéressantes du modèle :

- Ayant ces quatre jeux d'équations (I-17), (I-18), (I-19), (I-20), il reste uniquement à tenir compte de la condition aux limites (I-14) et de la condition initiale (I-16). L'équation (I-14) revêt alors une importance considérable au point qu'elle apparaîtra ultérieurement comme l' "équation" du modèle.
- La recherche de la fonction inconnue  $u(z, t)$  se ramène à celle de  $u_0(t)$  et une fois cette dernière connue, le problème peut être considéré comme résolu.
- L'enthalpie  $h$  peut être calculée indépendamment une fois  $u$  et  $\rho$  connus. Le problème se ramène à un problème à deux inconnues  $u$  et  $\rho$ .
- Pour le problème à deux inconnues  $u$  et  $\rho$ , les paramètres  $h_0$  et  $w$  n'apparaissent que par  $s = \frac{h_0}{w}$  et le paramètre  $h_c$  n'intervient pas.

1.7. CONCLUSION

En conclusion, ce chapitre nous a permis :

- de ramener le nombre des fonctions inconnues de quatre (vitesse, masse spécifique, enthalpie, pression) à deux (vitesse à l'entrée, masse spécifique). De plus, la vitesse à l'entrée  $u_0(t)$  remplace la vitesse  $u(z, t)$ ;
- de ramener le nombre des paramètres physiques du modèle de douze à six, soit (compte non tenu de singularités éventuelles) :
  - . 3 paramètres de géométrie  $f, l_0, l_1$ ,
  - . 1 paramètre combinant propriétés physiques et conditions de fonctionnement  $s$ ,
  - . 1 paramètre combinant en sus la géométrie  $\Delta p$ ,
  - . 1 paramètre combinant en sus la géométrie et l'accélération de pesanteur  $g$ ;
- d'établir un système d'équations relativement simples (I-17), (I-18), (I-19), (I-20), (I-14), (I-16).

Dans le chapitre suivant, nous rechercherons sous quelles conditions ce système est susceptible de présenter des solutions oscillatoires auto-entretenues et tenterons de comprendre l'origine de ces éventuelles solutions.

## CHAPITRE II

### ETABLISSEMENT ET DISCUSSION DE L'EQUATION DE BASE

#### MECANISME DES OSCILLATIONS

##### 2.1. INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de rechercher par quels mécanismes le modèle monophasé serait susceptible de présenter des solutions oscillatoires auto-entretenues. Pour cette recherche, il est souhaitable de raisonner sur le cas le plus simple possible, avant de généraliser.

Comme il a été exposé dans la première partie de cette étude, le "modèle monophasé" a été bâti autour de ce que nous avons appelé l' "effet de densité". Dans le schéma géométrique adopté, la zone où cet "effet de densité" se manifeste est la zone chauffante dans sa partie aval où la masse spécifique varie. A vrai dire, les autres zones (adiabatique amont, chauffante à masse spécifique constante, adiabatique aval) n'ont été ajoutées que pour rapprocher le modèle de la réalité physique, qui comporte pratiquement toujours de telles zones. Ces zones modifient profondément les caractéristiques du modèle (inertie, amortissement, etc...). On peut penser qu'elles modifieront profondément l'aspect quantitatif des oscillations éventuelles (d'où l'intérêt de les inclure dans le calcul) sans altérer le mécanisme (d'où l'intérêt de ne pas en tenir compte pour l'étude de ce mécanisme).

Nous commencerons donc par étudier le cas d'une seule zone, chauffante à masse spécifique variable, puis nous ajouterons les longueurs adiabatiques amont et aval, pour terminer par le cas beaucoup plus compliqué où la zone chauffante comporte une première partie à masse spécifique constante.

Dans le chapitre précédent nous avons poussé assez loin l'étude du système d'équations aux dérivées partielles sans tenir compte de la condition aux limites dynamique (ainsi nommée parce qu'elle est issue de l'équation de la dynamique).

C'est cette condition aux limites qui va maintenant nous préoccuper :

$$\Delta p = \int_{-l_0}^{l+l_1} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\theta} + g + f u^2 \right] \rho dz \quad (\text{I-14})$$

## 2.2. CAS D'UNE CONDUITE CHAUFFÉE SUR TOUTE SA LONGUEUR ET A MASSE SPECIFIQUE PARTOUT VARIABLE

(Dans l'analogie physique ce cas correspond à une entrée du fluide à température de saturation).

Les paramètres  $l_0$ ,  $l_1$  et  $s$  sont nuls. Le paramètre  $\theta = 1$ . Les équations (I-19) sont valables avec  $\lambda = 0$ ,  $\tau$  étant l'instant où la particule passe par l'origine, Elles s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(t) + z \\ \rho &= e^{-(t-\tau)} \\ z(t, \tau) &= e^t \int_{\tau}^t e^{-x} u_0(x) dx \\ \tau \leq t \leq t_1(\tau) &\text{ avec } l = e^{t_1} \int_{\tau}^{t_1} e^{-x} u_0(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-19'})$$

Reportons  $u$  dans la condition aux limites (I-14), en posant :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \rho dz &= \xi(t) \\ \int_0^1 \rho z dz &= \eta(t) \\ \int_0^1 \rho z^2 dz &= \zeta(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{II-1})$$

(L'introduction de ces quantités qui jouent un rôle fondamental est due à Monsieur Le Professeur Craya).

Il vient :

$$\Delta p = \left[ \frac{d u_0}{dt} + u_0 + g + f u_0^2 \right] \xi + (1 + 2 f u_0) \eta + f \zeta$$

Nous nous intéressons aux solutions périodiques. Supposant être dans un cas où un régime permanent, même instable, puisse exister (ce problème du régime permanent sera étudié dans le chapitre III), nous sommes amenés à poser :

$$u_0(t) = u_{00} + v(t) \quad (\text{II-2})$$

$u_{00}$  étant la vitesse à l'entrée pour le régime permanent considéré.

Nous ne faisons pour l'instant aucune hypothèse sur  $v(t)$ , sauf  $v(t) \geq -u_{00}$ , qui exprime que l'écoulement ne peut changer de sens.

$\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  étant les valeurs du régime permanent, par définition de  $u_{00}$ , on a :

$$\Delta p = \left[ u_{00} + g + f u_{00}^2 \right] \xi_0 + (1 + 2 f u_{00}) \eta_0 + f \zeta_0 \quad (\text{II-3})$$

En éliminant  $\Delta p$  entre l'équation du régime transitoire et celle du régime permanent, on obtient une relation différentielle <sup>1)</sup> définissant  $v$  :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{dv}{dt} + v + f v (2 u_{00} + v) \right] \xi + (u_{00} + g + f u_{00}^2) (\xi - \xi_0) \\ & + 2 f v \eta + (1 + 2 f u_{00}) (\eta - \eta_0) + f (\zeta - \zeta_0) = 0 \end{aligned}$$

ou, en réordonnant :

$$\begin{aligned} - \frac{dv}{dt} = & f v (2 u_{00} + v) + v + 2 f v \frac{\eta}{\xi} \\ & + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \frac{\xi - \xi_0}{\xi} + (1 + 2 f u_{00}) \frac{\eta - \eta_0}{\xi} + f \frac{\zeta - \zeta_0}{\xi} \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

1) On ne sait pas exprimer analytiquement  $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$  si on ne connaît pas la forme de  $u_0(t)$ . Il en résulte que (II-4) n'est pas une équation différentielle.  $\xi, \eta, \zeta$  sont cependant des fonctions de  $t$  seul, ce qui permet de raisonner comme si (II-4) était une équation différentielle.

La recherche des solutions se ramène à la résolution de l'équation (II-4) compte tenu de (I-19'), (II-1), (II-2).

### 2.3. ETUDE DE LA RELATION DIFFERENTIELLE EN $\frac{dv}{dt}$ . MECANISME MOTEUR

#### 2.3.1. Remarque sur les paramètres

Dans l'équation, le paramètre  $\Delta p$  a disparu. Il est remplacé par  $u_{00}$  auquel il est lié par (II-3). A chaque valeur de  $u_{00}$  correspond une valeur de  $\Delta p$  et une seule, mais la réciproque n'est pas toujours vraie (voir chapitre III).

Aussi dans la suite sera-t-il préférable de remplacer la donnée de  $\Delta p$  par celle de  $u_{00}$  qui combine également propriétés physiques, géométrie et conditions de fonctionnement.

La résolution analytique de (II-4) est impossible dans le cas général, mais on peut faire quelques constatations grâce à la forme de cette équation.

#### 2.3.2. Termes moteurs

Si  $v$  et  $\frac{dv}{dt}$  sont constamment de signe contraire  $v \frac{dv}{dt} \leq 0$ ,  $v$  ne peut que diminuer en valeur absolue car  $\frac{d(v^2)}{dt} \leq 0$ .

Une condition nécessaire pour que l'équation (II-4) possède des solutions oscillatoires est que, au moins sur certains intervalles de temps,  $v$  et  $\frac{dv}{dt}$  soient de même signe, c'est-à-dire que le second membre soit de signe contraire à  $v$ .

Il est, a fortiori, nécessaire que, sur certains intervalles de temps, un ou plusieurs termes du second membre soient de signe contraire à  $v$ .

Cette condition est loin d'être suffisante. (On conçoit qu'il faut que les intervalles de temps en question soient assez longs et que

les termes de signe contraire à  $v$  soient prépondérants en valeur absolue). Cependant, comme nous constaterons par la suite qu'effectivement (II-4) possède des solutions oscillatoires, cette condition nous indique les termes moteurs de l'oscillation.

Parmi les quantités figurant au second membre  $u_{00}$ ,  $\xi_0$ ,  $\xi$ ,  $\eta_0$ ,  $\eta$ ,  $\zeta_0$ ,  $\zeta$  sont essentiellement positifs ;  $f$  est positif ou nul ; seul  $g$  peut être négatif (cas d'un écoulement descendant).

Les trois premiers termes  $f(2u_{00} + v)v$ ,  $v$  et  $2f\frac{\eta}{\xi}v$  sont toujours du signe de  $v$ . Ils ne peuvent être moteurs d'oscillations. Au contraire, le quatrième  $(u_{00} + g + fu_{00}^2)\frac{\xi - \xi_0}{\xi}$  est le produit d'un coefficient constant qui peut être positif ou négatif suivant la valeur de  $g$  par une fonction de  $t$  qui dépend de  $v$ .

Cette fonction de  $t$  peut présenter un certain retard sur la fonction  $v$  et le terme peut donc être, sur certains intervalles de temps, de signe contraire à  $v$ .

Les cinquième et sixième termes  $(1 + 2fu_{00})\frac{\eta - \eta_0}{\xi}$  et  $f\frac{\zeta - \zeta_0}{\xi}$  sont le produit d'un coefficient positif par une fonction de  $t$  analogue à la précédente. Les trois derniers termes peuvent être moteurs pour un comportement oscillatoire si les intervalles de temps pendant lesquels ils sont de signe contraire à  $v$  sont suffisants.

$\xi - \xi_0$  est par unité de section la différence entre la masse de fluide présente dans la conduite à l'instant considéré et celle correspondant au régime permanent.

$\eta - \eta_0$  est lié à la variation de l'abscisse du centre de gravité de cette masse entre l'instant considéré et le régime permanent.

$\zeta - \zeta_0$  est la variation correspondante pour le moment d'inertie par rapport à l'origine.

Ces trois quantités proviennent directement de la variation de la masse spécifique ; c'est le phénomène que nous avons cherché à étudier en construisant le modèle.

Cet "effet de densité" peut réellement, grâce à son déphasage par rapport à la vitesse, être le moteur d'oscillations et dans le modèle considéré (réduit à sa seule longueur chauffante et à masse spécifique partout variable) c'est le seul phénomène moteur possible.

L'effet de densité intervient donc de trois façons différentes, qui sont : la variation de masse, la variation de l'abscisse du centre de gravité, la variation du moment d'inertie par rapport à l'origine.

L'effet moteur est pondéré de plus par des coefficients numériques :

- pour la variation de masse ce coefficient est  $\frac{u_{00} + g + f u_{00}^2}{\xi}$  et provient des trois termes de pertes de pression (mise en vitesse, hydrostatique, frottement) comme on le voit au cours de l'établissement de (II-4) à partir de (I-14) ;
- pour la variation de l'abscisse du centre de gravité, ce coefficient est  $\frac{1 + 2 f u_{00}}{\xi}$  et provient de deux des trois termes de pertes de pression (mise en vitesse et frottement) ;
- pour la variation du moment d'inertie, le coefficient est  $\frac{f}{\xi}$  et provient uniquement du terme de perte de pression par frottement.

Le fait que le coefficient de frottement participe à l'effet moteur peut paraître surprenant, mais il faut noter que l'état du système est défini par  $u_{00}$  et non par  $\Delta p$ . Une augmentation de  $f$  (dont on n'est même pas sûr qu'elle favorise les oscillations car  $f$  intervient aussi, évidemment, dans les termes d'amortissement) provoque donc, d'après (II-3), une augmentation de  $\Delta p$ , c'est-à-dire une augmentation de l'énergie fournie au système par le circuit extérieur. Que l'énergie mise en jeu par les oscillations augmente aussi n'a alors rien de surprenant.

2.3.3. Mécanisme moteur

Partant des résultats du paragraphe précédent, on peut décrire comme suit le mécanisme du phénomène d'oscillations.

Soit une perturbation initiale et, pour fixer les idées, donnons-lui les caractéristiques suivantes : pour  $t < 0$ , on est en régime permanent ; à l'instant  $t = 0$ ,  $v$  est positif,  $\frac{dv}{dt}$  est nul.

L'équation (II-4) nous indiquera à chaque instant le signe et le sens d'évolution de  $\frac{dv}{dt}$  (évolution schématisée sur la figure n° 3).

Séquence A

$v$  est positif ;  $u_0 = u_{00} + v$  est supérieur à  $u_{00}$ .

La troisième équation du système (I-19')  $z(t, \tau) = e^t \int_{\tau}^t e^{-x} u_0(x) dx$  montre que pour une abscisse  $z$  et un instant  $t$  donnés, la valeur de  $t - \tau$  partant de la valeur de régime permanent commence par décroître.

La seconde équation  $\rho = e^{-(t-\tau)}$  montre que la masse spécifique commence partout par croître.

Les quantités  $(\xi - \xi_0)$ ,  $(\eta - \eta_0)$ ,  $(\zeta - \zeta_0)$  sont positives et croissent.

L'équation (II-4) montre que  $\frac{dv}{dt}$  devient négatif dès que  $t$  devient positif, ceci à la fois du fait des termes d'amortissement et des termes "moteurs".

 $v$  décroît

La situation reste analogue tant que  $v$  est positif.

Physiquement, l'équation (II-4) traduit simplement le fait qu'une augmentation de la vitesse augmente les termes de pertes de pression autres que celui en  $\frac{\partial u}{\partial t}$  : ce dernier doit donc être négatif puisque la condition

aux limites dynamique impose une perte de pression totale constante ; il en résulte une diminution du débit.

Lorsque  $v$  s'annule, les quantités  $\xi - \xi_0$ ,  $\eta - \eta_0$ ,  $\zeta - \zeta_0$  sont positives.  $\frac{dv}{dt}$  est toujours négatif du fait, cette fois, des termes moteurs uniquement, il est plus ou moins grand en valeur absolue suivant les valeurs des différents paramètres du modèle.

#### . Séquence B

$v$  est négatif :  $u_0$  est inférieur à  $u_{00}$ .

Un raisonnement analogue à celui fait pour la séquence A montre que les quantités  $\xi - \xi_0$ ,  $\eta - \eta_0$ ,  $\zeta - \zeta_0$  commencent à décroître (avec un déphasage par rapport à l'instant où  $v$  s'annule). Elles sont cependant encore positives et assez fortes pour que les termes "moteurs" l'emportent sur les termes d'amortissement. L'équation (II-4) montre que  $\frac{dv}{dt}$  est toujours négatif, mais croît.

#### $v$ décroît de moins en moins vite

La situation reste analogue tant que  $\frac{dv}{dt}$  est négatif.

Physiquement, la perte de pression (terme en  $\frac{\partial u}{\partial t}$  exclu) décroît mais reste supérieure à celle du régime permanent initial (bien que la vitesse soit inférieure à celle de ce régime). Le débit décroît (de moins en moins vite).

#### . Séquence C

$v$  est négatif.

Les quantités  $\xi - \xi_0$ ,  $\eta - \eta_0$ ,  $\zeta - \zeta_0$  continuent à décroître, les termes "moteurs" ne peuvent plus imposer leur signe au second membre de l'équation (II-4), ceci d'autant plus que les termes d'amortissement ont grandi en valeur absolue.

L'équation (II-4) montre que  $\frac{dv}{dt}$  est positif.

Les quantités  $\xi - \xi_0$ ,  $\eta - \eta_0$ ,  $\zeta - \zeta_0$  peuvent devenir négatives au cours de cette séquence et faire croître  $\frac{dv}{dt}$ .

v croît.

La situation reste analogue tant que v est négatif.

Physiquement, la perte de pression (terme en  $\frac{\partial u}{\partial t}$  exclu) devient inférieure à celle du régime permanent initial ce qui, compte tenu de la condition aux limites dynamique, fait croître le débit.

#### . Séquence D

v est positif.

Il suffit de refaire, en changeant les signes et les sens de variation, le raisonnement de la séquence B pour montrer que v croît de moins en moins vite, jusqu'à ce que  $\frac{dv}{dt}$  s'annule.

On est alors ramené à des conditions analogues à celles du début de la séquence A.

Comme on pouvait s'y attendre, les séquences motrices sont celles qui suivent les changements de signe de v (séquences B et D). Au cours de ces séquences, les termes d'amortissement sont plus que contre-balancés par les termes moteurs du fait du déphasage entre v d'une part,  $\rho$  et les différentes fonctions de  $\rho$  :  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , d'autre part.

L'oscillation pourra être entretenue ou non, suivant les valeurs de ces déphasages. On conçoit par exemple que plus la valeur absolue de  $\frac{dv}{dt}$  est grande lors du changement du signe de v, plus l'oscillation risque d'apparaître.

Le schéma ci-dessus est tout à fait parallèle au mécanisme souvent mis en avant dans la littérature, mécanisme dit "par effet d'allègement" à cette différence près que ce dernier ne s'intéresse qu'au terme de perte de pression hydrostatique et tombe donc complètement si l'écoulement se fait horizontalement ou vers le bas.

#### 2.3.4. Conséquences

a) La forme même de (II-4) montre qu'il n'y a aucune différence de principe entre les cas  $g > 0$ ,  $g = 0$ ,  $g < 0$  : il y a possibilité d'oscillations en canal horizontal ou à écoulement vers le bas.

Cependant, si  $g$  est trop fortement négatif, le terme en  $(\xi - \xi_0)$  devient terme d'amortissement dans les périodes où il était précédemment moteur et réciproquement. S'il l'emporte sur les termes en  $\eta - \eta_0$  et  $\zeta - \zeta_0$ , l'oscillation n'est plus possible.

La gamme du paramètre  $g$  compatible avec les oscillations est limitée inférieurement par une fonction (négative) des autres paramètres, ici  $f$  et  $u_{00}$ .

b) On ne peut rien dire a priori sur l'influence de  $f$  et  $u_{00}$ , qui interviennent de manière complexe dans (II-4).

Par contre,  $g$  étant en facteur du terme moteur  $\frac{\xi - \xi_0}{\xi}$ , il semblerait qu'une valeur grande de  $g$  favorise un comportement oscillatoire. Nous verrons ci-dessous qu'il n'en est rien et l'explication est la suivante :

Les termes moteurs ne le sont que grâce à un déphasage convenable entre  $v$  d'une part,  $\rho$  d'autre part. Si  $g$  devient grand ce déphasage ne change pas (les équations (I-19') ne contiennent pas  $g$ ). Par contre, l'importance du terme moteur en  $(\xi - \xi_0)$  est telle que les séquences sont très courtes. Exprimé en nombre de périodes, le déphasage de  $\rho$  sur  $v$  devient trop grand pour que l'effet de densité soit moteur.

S'il en est ainsi et si  $g$  continue à croître, le déphasage (exprimé en nombre de périodes) pourrait, continuant à croître, redevenir correct à  $2\pi$  près, et le comportement oscillatoire pourrait reparaître. C'est ce qu'effectivement on constatera dans certains cas.

En pratique, cependant, la gamme de  $g$  compatible avec les oscillations est limitée supérieurement par une fonction (positive) des autres paramètres, ici  $f$  et  $u_{00}$ .

c) Etablissement d'un critère de stabilité

Du fait du nombre important de termes, la forme de (II-4) enlève tout espoir en ce qui concerne la possibilité d'établir un critère simple permettant de déterminer si telle ou telle combinaison de paramètres est stable ou instable.

Le second membre comporte en effet trois termes d'amortissement et trois termes susceptibles d'être moteurs. Ces termes combinent souvent tous les paramètres (sauf  $g$ ).

De plus, les termes moteurs ne le sont que pendant des intervalles de temps finis.

d) Méthode de résolution de (II-4)

La résolution analytique étant impossible, une première méthode consisterait à étudier numériquement le système composé de (I-19'), (II-1), (II-2), (II-4).

Cette méthode serait valable pour l'étude d'un cas particulier, mais pour une étude théorique générale, d'une part elle est trop lourde, d'autre part elle ne nous apprendrait rien. On se contenterait de constater que telle ou telle combinaison de paramètres est stable ou instable. C'est le problème classique de l'utilisation des modèles (cf. première partie).

La forme de (I-19') montre, qu'en se donnant la forme de  $u_0(t)$  ou, ce qui revient au même, de  $v(t)$ , le problème se simplifie considérablement. On pourra en effet souvent exprimer  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\zeta(t)$  et transformer (II-4) en une équation où  $t$  apparaîtra de manière explicite.

La difficulté sera d'explorer toutes les formes de  $u_0(t)$  possibles. Il nous faut restreindre le champ du calcul en introduisant une hypothèse supplémentaire. Physiquement, partant d'un régime permanent, les perturbations susceptibles d'écartier le fonctionnement de ce régime permanent, s'il n'est pas stable au sens restrictif du terme <sup>1)</sup>, sont de deux sortes:

- les petites perturbations, telles que les paramètres définissant la perturbation (amplitude et sa dérivée par rapport au temps) soient petits devant les paramètres du régime permanent. On peut mathématiquement les assimiler à des infiniment petits du premier ordre,
- les grandes perturbations, par opposition aux précédentes. Hormis les cas où on modifie brusquement un paramètre de fonctionnement et ceux où, le système étant instable, les petites perturbations en entraînent de grandes, les premières sont pratiquement les seules à exister dans un système hydraulique.

Pour de petites perturbations, agissant sur  $u_0$  par exemple, le système (I-19') montre que la perturbation sur  $z$  ( $t, \tau$ ) est également petite de même, en conséquence, que celles sur  $\rho$  ( $z, t$ ),  $\xi$  ( $t$ ),  $\eta$  ( $t$ ),  $\zeta$  ( $t$ ). Dans l'équation (II-4) où  $f, u_{00}, g, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$  sont finis, les quantités suivantes sont des infiniment petits du premier ordre :  $v, \xi - \xi_0, \eta - \eta_0, \zeta - \zeta_0$  et finalement  $\frac{dv}{dt}$ .

Cette constatation suggère de linéariser (II-4) en supprimant les termes du second ordre et on obtient :

$$\begin{aligned}
 - \frac{dv}{dt} = & 2 f u_{00} v + v + 2 f \frac{\eta_0}{\xi_0} v \\
 & + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \frac{\xi - \xi_0}{\xi_0} + (1 + 2 f u_{00}) \frac{\eta - \eta_0}{\xi_0} + f \frac{\zeta - \zeta_0}{\xi_0}
 \end{aligned}
 \tag{II-5}$$

1) Un système est stable si, écarté de sa position d'équilibre, il la rejoint (soit asymptotiquement, soit après des oscillations amorties).

Il est remarquable que (II-5) ait exactement la même structure que (II-4) du point de vue des raisonnements du paragraphe 3.2. concernant les termes d'amortissement et les termes moteurs.

Ceci justifie l'hypothèse suivante, qui va nous permettre de poursuivre les calculs.

Nous admettons qu'en ce qui concerne les petites perturbations, les solutions de (II-5) sont identiques à celles de (II-4) et nous nous limiterons pour la suite à l'étude des petites perturbations.

Supposant  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  explicités en fonction de  $t$ , (II-5) est une équation différentielle linéaire en  $v$  dont la solution générale est une forme linéaire des solutions particulières en  $e^{ct}$ , où  $c$  est un nombre complexe. Il suffit donc d'étudier le système (I-19'), (II-1), (II-4) avec la forme :

$$u_0 = u_{00} + v_0 e^{ct} \quad (\text{II-6})$$

où  $v_0$  et  $c$  sont des constantes ( $v_0$  réelle,  $c$  complexe).

REMARQUES :

- Sur le plan mathématique, on sait qu'il peut n'y avoir aucun rapport entre la solution d'une équation non linéaire et celle de l'équation linéarisée correspondante.

L'hypothèse qui nous a permis de remplacer (II-4) par (II-5) doit donc être considérée uniquement comme une hypothèse physique, basée sur la structure et le rôle des termes de (II-4) et (II-5).

La comparaison des résultats avec l'expérience nous indiquera si cette hypothèse est valable. Cette comparaison sera indispensable avant toute exploitation générale du modèle, mais une fois faite sur des cas particuliers elle nous donnera une "assurance raisonnable" que l'hypothèse ci-dessus est bonne.

- Sur le plan expérimental, certains auteurs pensent qu'il existe des seuils correspondant à de petites perturbations et des seuils correspondant à de grandes perturbations (amplitude initiale finie). Quoi qu'il en soit, c'est à l'étude des premières que nous consacrerons la suite de ce travail. Ils constituent pour le moins le cas le plus courant.
- Nous intéressant aux petites perturbations, nous nous intéresserons ipso facto spécialement aux seuils, car au-delà de ceux-ci les perturbations deviennent finies et des termes du second ordre interviendront pour limiter éventuellement l'amplitude et modifier la fréquence.
- L'inéquation imposée jusqu'à présent  $v(t) \geq -u_{00}$  est automatiquement vérifiée.

#### 2.4. CAS D'UNE CONDUITE CHAUFFÉE SUR UNE PARTIE DE SA LONGUEUR, POUR UN PARAMÈTRE DE SOUS-SATURATION NUL ( $s = 0$ )

C'est le cas étudié au paragraphe 2.2. auquel nous ajoutons la prise en compte de longueurs adiabatiques amont et aval.

Pour écrire la condition aux limites dynamique, nous calculerons successivement la différence de pression sur chaque zone.

##### . Zone adiabatique amont

Les équations (I-17)  $u = u_0(t)$   $\rho = 1$  permettent d'écrire immédiatement :

$$\Delta p_{\text{amont}} = \int_{-l_0}^0 \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + g + f u^2 \right] \rho dz = \left[ \frac{d u_0}{dt} + g + f u_0^2 \right] l_0 \quad (\text{II-7})$$

##### . Zone chauffante

Nous avons établi au paragraphe 2.2. :

$$\Delta p_{\text{chauff.}} = \left[ \frac{d u_0}{dt} + u_0 + g + f u_0^2 \right] \xi + (1 + 2 f u_0) \eta + f \zeta \quad (\text{II-8})$$

. Zone adiabatique aval

Les équations (I-20) s'écrivent compte tenu du fait que  $\lambda \equiv 0$  et que  $t_1$  est donné par (I-19') :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(t) + 1 \\ \rho_1(\tau) &= e^{-(t_1 - \tau)} \\ z(t, \tau) &= 1 + \int_{t_1}^{\tau} [u_0(x) + 1] dx \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-20}')$$

Il s'ensuit :

$$\Delta p_{\text{aval}} = \int_1^{1+l_1} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + g + f u^2 \right) \rho dz = \left[ \frac{d u_0}{dt} + g + f (u_0 + 1)^2 \right] \xi_1 \quad (\text{II-9})$$

en posant :

$$\int_1^{1+l_1} \rho dz = \xi_1(t) \quad (\text{II-10})$$

La condition aux limites dynamique est la somme membre à membre des équations (II-7), (II-8), (II-9).

En posant, comme au paragraphe 2.2.,  $u_0(t) = u_{00} + v(t)$  (II-2) elle s'écrit :

- en régime permanent,  $\xi_{10}$  étant la valeur de régime permanent de  $\xi_1(t)$

$$\begin{aligned} \Delta p &= (g + f u_{00}^2) (1_0 + \xi_0 + \xi_{10}) + u_{00} \xi_0 + \\ &\quad (1 + 2 f u_{00}) \eta_0 + f \zeta_0 + f (2 u_{00} + 1) \xi_{10} \end{aligned} \quad (\text{II-11})$$

- en régime transitoire, après élimination des termes du régime permanent

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{dv}{dt} + f v (2 u_{00} + v) \right] (1_0 + \xi + \xi_1) + (g + f u_{00}^2) (\xi - \xi_0 + \xi_1 - \xi_{10}) \\ &+ v \xi + u_{00} (\xi - \xi_0) + 2 f v \eta + (1 + 2 f u_{00}) (\eta - \eta_0) + f (\zeta - \zeta_0) \\ &+ 2 f v \xi_1 + f (2 u_{00} + 1) (\xi_1 - \xi_{10}) = 0 \end{aligned}$$

et, en réordonnant :

$$\begin{aligned}
 -\frac{dv}{dt} = & f (2 u_{oo} + v) v + v \frac{\xi}{l_o + \xi + \xi_1} + 2 f v \frac{\eta + \xi_1}{l_o + \xi + \xi_1} \\
 & + (u_{oo} + g + f u_{oo}^2) \frac{\xi - \xi_o}{l_o + \xi + \xi_1} + (1 + 2 f u_{oo}) \frac{\eta - \eta_o}{l_o + \xi + \xi_1} \\
 & + f \frac{\zeta - \zeta_o}{l_o + \xi + \xi_1} + [g + f (u_{oo} + 1)^2] \frac{\xi_1 - \xi_{10}}{l_o + \xi + \xi_1}
 \end{aligned} \tag{II-12}$$

(II-12) s'écrit après linéarisation :

$$\begin{aligned}
 -\frac{dv}{dt} = & 2 f u_{oo} v + v \frac{\xi_o}{l_o + \xi_o + \xi_{10}} + 2 f v \frac{\eta_o + \xi_{10}}{l_o + \xi_o + \xi_{10}} \\
 & + (u_{oo} + g + f u_{oo}^2) \frac{\xi - \xi_o}{l_o + \xi_o + \xi_{10}} + (1 + 2 f u_{oo}) \frac{\eta - \eta_o}{l_o + \xi_o + \xi_{10}} \\
 & + f \frac{\zeta - \zeta_o}{l_o + \xi_o + \xi_{10}} + [g + f (u_{oo} + 1)^2] \frac{\xi_1 - \xi_{10}}{l_o + \xi_o + \xi_{10}}
 \end{aligned} \tag{II-13}$$

Les raisonnements du paragraphe 2.3. restent valables avec les compléments ci-dessous.

Il y a maintenant quatre termes susceptibles d'être moteurs au lieu de trois, mais les trois termes correspondants sont plus faibles qu'au paragraphe 2.2.,  $l_o$  et  $\xi_1$  figurant au dénominateur.

L'effet moteur de la colonne montante est pondéré par un coefficient numérique provenant de deux des trois termes de pertes de pression (hydrostatique et frottement).

L'influence de la longueur adiabatique amont  $l_o$  est favorable à la stabilité, car elle diminue dans la même proportion tous les termes moteurs et deux seulement des termes d'amortissement. Cette action risque d'être assez discrète suivant l'importance relative du terme d'amortissement non modifié.

L'influence de la longueur adiabatique aval  $l_1$ , qui intervient par  $\xi_1$  est plus complexe.

Des trois termes d'amortissement, le premier est inchangé, le second diminue, le troisième augmente (en effet les formules (II-1) entraînent  $\eta < \xi$  qui entraîne à son tour  $\frac{\eta}{l_0 + \xi} < 1$  et  $\frac{\eta + \xi_1}{l_0 + \xi + \xi_1} < \frac{\eta}{l_0 + \xi}$ ).

Les trois termes moteurs préexistants sont diminués, mais un quatrième terme moteur apparaît.

On ne peut conclure qu'une chose : si  $\xi_1$  augmente indéfiniment par rapport à  $\xi$ , par exemple par accroissement de  $l_1$ , les termes moteurs tendent tous vers zéro et l'écoulement ne peut être que stable. Ceci s'explique par le fait que si  $l_1$  est très grand, la valeur moyenne sur la longueur adiabatique aval d'un paramètre fluctuant quelconque est très voisine de sa valeur de régime permanent. Comme la majeure partie de la perte de pression provient alors de cette longueur adiabatique, la condition aux limites ne joue pratiquement que sur elle et aucun effet moteur n'est suffisant pour entretenir des oscillations.

## 2.5. CAS GENERAL

(Modèle monophasé tel qu'il est défini au chapitre I).

Ce cas est beaucoup plus complexe que le précédent, à cause de l'introduction d'une frontière mobile entre la zone chauffante à masse spécifique constante et la zone chauffante à masse spécifique variable, (équivalente à la frontière d'ébullition dans l'analogie physique).

L'équation traduisant la condition aux limites dynamique est établie en annexe III (équation (6)). Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
-\frac{dv}{dt} = & f (2 u_{oo} + v) v + v \frac{\xi}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} + 2 f v \frac{\eta + \xi_1}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} \\
& + (u_{oo} + g + f u_{oo}^2) \frac{\xi - \xi_o}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} + (1 + 2 f u_{oo}) \frac{\eta - \eta_o}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} \\
& + f \frac{\xi - \xi_o}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} + [g + f(u_{oo} + 1)^2] \frac{\xi_1 - \xi_{10}}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} - \frac{d\lambda}{dt} \frac{\xi + \xi_1}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} \\
& - 2 f v \frac{\lambda (\xi + \xi_1)}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} + (g + f u_{oo}^2) \frac{\lambda - \lambda_o}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} \\
& - (1 + 2 f u_{oo}) \frac{\lambda \xi - \lambda_o \xi_o}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} + f \frac{\lambda^2 \xi - \lambda_o^2 \xi_o^2}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} - 2 f \frac{\lambda \eta - \lambda_o \eta_o}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} \\
& - 2 f (u_{oo} + 1) \frac{\lambda \xi_1 - \lambda_o \xi_{10}}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1} + f \frac{\lambda^2 \xi_1 - \lambda_o^2 \xi_{10}}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1}
\end{aligned} \tag{II-14}$$

Cette équation semble avoir une structure différente de celles considérées ci-dessus (II-4) ou (II-12).

Le début du second membre correspond terme à terme au second membre de (II-12). Pour ces termes l'influence de  $\lambda$ , longueur de zone chauffante à masse spécifique constante, est équivalente à une augmentation de  $l_o$ , longueur adiabatique amont, ce qui est parfaitement logique. Mais il apparaît de nombreux autres termes.

L'un deux  $- 2 f v \frac{\lambda (\xi + \xi_1)}{l_o + \lambda + \xi + \xi_1}$  est constamment moteur. En effet, les quantités qu'il contient, sauf  $v$ , sont essentiellement positives. Ce terme est donc constamment de signe contraire à  $v$ .

Tous les autres sont susceptibles d'être moteurs sur certains intervalles de temps, comme les termes moteurs de (II-12). On notera toutefois qu'ils sont affectés de coefficients de signes variés.

Conséquence directe de la loi reliant la masse spécifique à l'enthalpie, la quantité  $\lambda$  (équivalente, dans l'analogie physique, à la

longueur non bouillante) donne naissance à des termes moteurs qui relèvent aussi de l' "effet de densité". L'influence de cet effet est plus complexe que dans les équations (II-4) ou (II-12), ce qui est logique étant donné la forme plus compliquée de  $\rho = \rho(h)$  avec notamment discontinuité de la dérivée première. Il y a lieu de noter par exemple que dans (II-4) ou (II-12)  $\xi(t)$  est défini par :

$$\xi(t) = \int_0^1 \rho dz$$

alors que dans (II-14) :

$$\xi(t) = \int_{\lambda(t)}^1 \rho dz$$

Pour certains termes où apparaissait  $\xi$  dans (II-12), on conçoit ainsi qu'il apparaisse  $\lambda + \xi$  dans (II-14). C'est le cas du terme en  $(g + f u_{oo}^2)$ .

$$\text{En posant } 1 = 1_0 + \lambda + \xi + \xi_1 \quad (\text{II-15})$$

ces remarques permettent de réécrire (II-14) en groupant logiquement les termes :

$$\begin{aligned} -1 \frac{dv}{dt} &= f 1 (2 u_{oo} + v) v + (v - \frac{dv}{dt}) \xi - \frac{d\lambda}{dt} \xi_1 + 2 f v [\eta - \lambda \xi + \xi_1 (1 - \lambda)] \\ &+ u_{oo} (\xi - \xi_0) + (g + f u_{oo}^2) (\xi - \xi_0 + \lambda - \lambda_0) + (1 + 2 f u_{oo}) [\eta - \lambda \xi - (\eta_0 - \lambda_0 \xi_0)] \\ &+ f [(\xi - 2\lambda\eta + \lambda^2 \xi) - (\xi_0 - 2\lambda_0 \eta_0 + \lambda_0^2 \xi_0)] \quad (\text{II-14}') \\ &+ [g + f (u_{oo} + 1)^2] (\xi_1 - \xi_{10}) - 2 f (u_{oo} + 1) (\lambda \xi_1 - \lambda_0 \xi_{10}) + f (\lambda^2 \xi_1 - \lambda_0^2 \xi_{10}) \end{aligned}$$

On constate alors que la structure de (II-14') est très voisine de celle de (II-12).

Les raisonnements ayant conduit à la linéarisation de (II-12) restent valables et on considérera dans la suite (II-14') sous sa forme linéarisée.

## 2.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence le mécanisme moteur d'éventuelles oscillations ; le déphasage sur le débit des différents termes de perte de pression, par l'intermédiaire de la masse spécifique.

Nous avons été amenés, pour poursuivre l'étude du modèle, à nous limiter pour la suite à l'étude des petites perturbations autour d'un régime permanent.

La prochaine étape, objet du chapitre suivant, sera logiquement l'étude de ce régime permanent.

Enfin, les équations de ce chapitre conduisent à distinguer :

- trois paramètres fondamentaux qui interviennent, par ordre de complexité croissante, dans tous les cas :  $g$ ,  $f$ ,  $u_{00}$  (ce dernier remplaçant  $\Delta p$ )
- trois paramètres supplémentaires qui permettent d'élargir le cadre du modèle et qui introduisent une complexité croissante :  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $s$ .

## CHAPITRE III

### REGIME PERMANENT

#### 3.1. INTRODUCTION

Le chapitre précédent nous a orienté vers l'étude de petites perturbations autour du régime permanent, dont la vitesse entre d'ailleurs dans un des paramètres adimensionnels du modèle,  $u_{00}$ .

Après avoir établi en détail le système d'équations du modèle, il faut maintenant le résoudre dans le cas particulier simple du régime permanent.

La condition aux limites dynamique, dont nous avons vu le rôle fondamental au chapitre précédent, est établie en annexe III. Pour le régime permanent, elle s'écrit (formule (5) de cette annexe) :

$$\begin{aligned} \Delta p = & (g + f u_{00}^2)(1_0 + \lambda_0) + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \xi_0 + (1 + 2 f u_{00})(\eta_0 - \lambda_0 \xi_0) \\ & + f (\zeta_0 - 2 \lambda_0 \eta_0 + \lambda_0^2 \xi_0) + g \xi_{10} + f (u_{00} + 1 - \lambda_0)^2 \xi_{10} \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

Il faut, pour l'écrire en fonction des paramètres du modèle, expliciter  $\lambda_0$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$ ,  $\xi_{10}$  en fonction de ces mêmes paramètres au moyen des formules (I-17) à (I-20). Ce calcul est fait en annexe IV et nous rappelons ci-dessous les formules les plus importantes :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= u_{00} s \quad \text{avec} \quad u_{00} s < 1 \\ \xi_0 &= u_{00} k \quad \text{avec} \quad k = \text{Log } m \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

$$m = 1 - s + \frac{1}{u_{00}}$$

$$m > 1, k > 0 \quad \text{(III-2)}$$

$$\xi_{10} = \frac{l_1}{m}$$

La perte de pression étant linéaire en  $g$  et  $f$  on obtient, en ordonnant par rapport à ces paramètres :

$$\Delta p = g (1_0 + \lambda_0 + \xi_0 + \xi_{10}) + u_{00} (1 - \lambda_0)$$

$$+ f \left[ u_{00}^2 (1_0 + 1) + \frac{u_{00}}{2} (1 - \lambda_0)^2 + (u_{00} + 1 - \lambda_0)^2 \xi_{10} \right] \quad \text{(III-3)}$$

### 3.2. CARACTERISTIQUE HYDRAULIQUE INTERNE DE LA CONDUITE

La formule (III-3) est l'expression analytique de la relation entre  $\Delta p$  et  $u_{00}$  qui donne, en régime permanent, la perte de pression dans la conduite en fonction de la vitesse à l'entrée. La courbe  $\Delta p (u_{00})$  correspondante est la caractéristique hydraulique interne de la conduite.

La caractéristique externe est, par définition, une horizontale (condition aux limites  $\Delta p = \text{constante}$ ).

Un régime permanent, pour  $\Delta p$  et  $u_{00}$  données satisfaisant (III-3), ne peut exister que si pour ces valeurs  $\frac{\partial \Delta p}{\partial u_{00}} > 0$  (voir figure 2).

S'il n'en est pas ainsi (point 2 du cas A, pour lequel il est d'usage de dire que la caractéristique interne est "en S") toute variation accidentelle de la vitesse à l'entrée provoque un écart entre charge motrice (imposée par la caractéristique externe) et perte de pression qui aggrave la variation en question et, partant du point 2, on rejoint soit le point 1, soit le point 3.

Les points à tangente horizontale de la courbe "en S" font partie de la région impossible puisqu'ils sont instables pour un sens de variation

de la vitesse. Pour une caractéristique interne donnée, il y a donc toute une gamme de  $u_{00}$  interdite.

Les points de fonctionnement du modèle monophasé étant définis par  $u_{00}$  et non par  $\Delta p$ , il est important d'étudier cette limitation.

Le calcul de  $\frac{\partial \Delta p}{\partial u_{00}}$  donne (formule (14) de l'annexe IV) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta p}{\partial u_{00}} = & g \left[ s + k - \frac{1}{m u_{00}} + \frac{l_1}{(m u_{00})^2} \right] + 1 - 2 \lambda_0 \\ & + f \left[ \frac{1}{2} + l_1 + 2 u_{00} (l_0 + 1 + l_1) - 2 \lambda_0 (1 + l_1) + \frac{3}{2} \lambda_0^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{III-4})$$

### 3.3. DOMAINE DE FONCTIONNEMENT POSSIBLE

La condition  $\frac{\partial \Delta p}{\partial u_{00}} > 0$  est imposée au point représentant le système dans l'espace à six paramètres ( $g, f, u_{00}, l_0, l_1, s$ ), c'est-à-dire que le point doit être à l'intérieur (frontière exclue) d'un certain domaine limité par la surface (S) d'équation  $\frac{\partial \Delta p}{\partial u_{00}} = 0$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & g \left[ s + k - \frac{1}{m u_{00}} + \frac{l_1}{(m u_{00})^2} \right] + 1 - 2 \lambda_0 + \\ & f \left[ \frac{1}{2} + l_1 + 2 u_{00} (l_0 + 1 + l_1) - 2 \lambda_0 (1 + l_1) + \frac{3}{2} \lambda_0^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Pour obtenir une représentation dans l'espace à trois dimensions, nous bloquerons trois des six paramètres indépendants du système. Deux possibilités sont logiques à ce sujet :

- Pour l'étude d'une installation donnée on pourrait bloquer les paramètres de géométrie  $f, l_0, l_1$  et étudier la surface  $g(u_{00}, s)$  qui est à une seule nappe, (III-5) étant une forme linéaire de  $g$ .
- Pour une étude théorique, nous avons vu au chapitre précédent qu'il convenait de classer les paramètres en deux groupes ( $g, f$  et  $u_{00}$  d'une part, qui jouent un rôle fondamental, et  $l_0, l_1$  et  $s$  d'autre part, qui ne font que compliquer la formulation.

Nous étudierons ici cette surface  $u_{oo}(g, f)$  qui est une surface réglée, (III-5) étant une forme linéaire en  $g$  et  $f$  : l'intersection de la surface par un plan  $u_{oo} = \text{constante}$  est une droite.

L'étude de cette surface n'est intéressante que dans le domaine  $0 < u_{oo} < \frac{1}{s}$   $f \geq 0$ .

Ces conditions ont été établies antérieurement (voir notamment (III-2)).

### 3.3.1. Recherche d'un domaine où le fonctionnement est possible

Il est montré en annexe IV que dans (III-5) :

- le coefficient de  $g$  est toujours positif,
- le coefficient de  $f$  est toujours positif si  $s$  est inférieur ou égal à  $1 + \frac{l_0}{1 + l_1}$ ,
- le terme ne contenant ni  $g$  ni  $f$  est positif si  $u_{oo}$  est inférieur à  $\frac{1}{2s}$ .

Donc :

- si le paramètre  $s = 0$  (équivalent dans l'analogie physique à une entrée à saturation) et si  $g \geq 0$  (écoulement vers le haut ou horizontal) toutes les valeurs de  $u_{oo}$  sont permises ;
- si le paramètre  $s \leq 1 + \frac{l_0}{1 + l_1}$  (équivalent dans l'analogie physique à une sous-saturation modérée à l'entrée) et si  $g \geq 0$ , les valeurs de  $u_{oo}$  permises peuvent être bornées supérieurement, mais les faibles valeurs, et notamment  $u_{oo} < \frac{1}{2s}$  sont toujours permises;
- si le paramètre  $s > 1 + \frac{l_0}{1 + l_1}$  et si  $g \geq 0$ , toutes les valeurs de  $u_{oo}$  inférieures à  $\frac{1}{2s}$  sont permises pour  $f = 0$ .

Connaissant la surface (S)  $\frac{\partial \Delta p}{\partial u_{oo}} = 0$  dans l'espace  $(g, f, u_{oo})$  ces remarques permettront dans tous les cas de déterminer le domaine autorisé.

3.3.2. Forme de la surface (S)

A  $l_0$ ,  $l_1$  et  $s$  donnés, les génératrices de la surface étant parallèles au plan  $(g, f)$ , nous étudierons la forme de cette surface en faisant  $u_{00} = \text{constante}$  dans (III-5) :

$$\begin{aligned} \text{a) Si } u_{00} \text{ tend vers zéro : } m u_{00} &= 1 + (1 - s) u_{00} \rightarrow 1 \\ m &\rightarrow \infty \\ k &\rightarrow \infty \\ \lambda_0 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dans (III-5) le coefficient de  $g$  tend vers l'infini, tandis que les autres termes restent finis : la génératrice de la surface dans le plan  $u_{00} = 0$  est l'axe des  $f$ .

$$\begin{aligned} \text{b) Si } u_{00} \text{ tend vers } \frac{1}{s} : \lambda_0 &\rightarrow 1 \\ m &\rightarrow 1 \\ k &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

et (III-5) s'écrit :

$$l_1 s^2 g - 1 + f \left[ 2 \frac{l_0 + 1 + l_1}{s} - l_1 \right] = 0$$

équation d'une droite passant par le point  $f = 0$ ,  $g = \frac{1}{l_1 s^2} > 0$

et de pente négative si  $s < 2 \frac{l_0 + 1 + l_1}{l_1}$ , positive dans le cas contraire (infinie pour  $s = 2 \frac{l_0 + 1 + l_1}{l_1}$ ).

c) Le coefficient de  $g$  dans (III-5) étant toujours positif et fini, sauf aux bornes du domaine de  $u_{00}$ , et le terme ne dépendant que de  $u_{00}$  étant  $1 - 2 u_{00} s$ , l'intersection de la surface (S) représentant l'équation (III-5) avec le plan  $f = 0$  se fait à distance finie (sauf, lorsque  $l_1$  ou  $s$  tend vers zéro, si  $u_{00}$  tend vers  $\frac{1}{s}$ ) et :

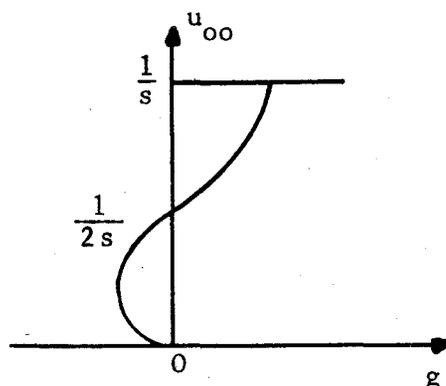
. dans la partie  $g < 0$  pour  $u_{00} < \frac{1}{2s}$

. sur l'axe des  $u_{00}$  ( $g = 0$ ) pour

$$u_{00} \rightarrow 0 \text{ et } u_{00} = \frac{1}{2s}$$

. dans la partie  $g > 0$  pour

$$u_{00} > \frac{1}{2s}$$



d) La génératrice de cote  $u_{00}$  a pour projection dans le plan  $(g, f)$  une droite d'équation :

$$f = \frac{- \left[ s + k - \frac{1}{m u_{00}} + \frac{l_1}{(m u_{00})^2} \right] g + 2 u_{00} s - 1}{\frac{1}{2} + l_1 + 2 u_{00} (l_0 + 1 + l_1) - 2 u_{00} s (1 + l_1) + \frac{3}{2} u_{00}^2 s^2}$$

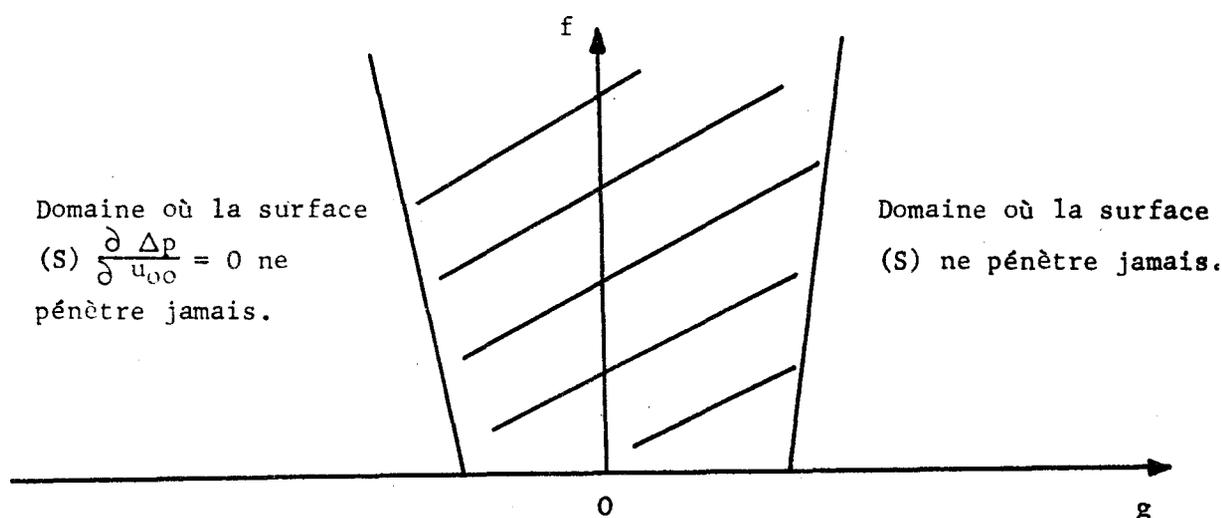
La pente de cette droite est de signe contraire à celui du dénominateur. La discussion comporte un grand nombre de cas, suivant les valeurs de  $l_1$  et de  $s$ , et ne présente pas suffisamment d'intérêt pour être reproduite ici, mais nous la donnons en annexe IV (§ -7).

Le tracé de la surface (S) représentant l'équation (III-5) est d'ailleurs facile dans chaque cas particulier (voir chapitre VI consacré à l'étude arithmétique du modèle).

Nous retiendrons que la pente, toujours négative pour les faibles valeurs de  $s$ , ou, à fort  $s$  pour les faibles valeurs de  $u_{00}$ , peut, lorsque  $u_{00}$  croît (et pour certaines valeurs de  $s$ ), devenir positive, puis de nouveau négative. Ces changements de signe se font toujours en passant par l'infini. La valeur absolue de la pente est donc bornée inférieurement, sauf lorsque  $l_1 s = 0$  si  $u_{00} \rightarrow \frac{1}{s}$ .

e) Il résulte de ce paragraphe et des précédents que pour  $f$  et  $u_{00}$  donnés dans le domaine intéressant ( $f \geq 0$  ;  $0 < u_{00} < \frac{1}{s}$ ) la région des grandes valeurs de  $g$  n'est pas traversée par la surface et fait toujours partie du domaine permis.

De même, la région des valeurs de  $g$  négatives et très grandes en valeur absolue fait toujours partie du domaine impossible.



### 3.4. CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à l'étude du régime permanent. Nous y avons montré qu'on ne pouvait se donner a priori les six paramètres du modèle ( $g, f, u_{00}, l_0, l_1, s$ ), certains domaines de l'espace à six dimensions correspondants étant interdits. Ces domaines sont faciles à délimiter par la condition  $\frac{\partial \Delta p}{\partial u_{00}} > 0$ .

Nous supposons toujours dans la suite cette condition remplie pour les études analytiques. Nous la vérifierons pour les études arithmétiques. Le régime permanent étant connu, le chapitre suivant sera consacré à l'étude de petites perturbations autour de ce régime permanent.

## CHAPITRE IV

### PETITES PERTURBATIONS

#### 4.1. INTRODUCTION

##### 4.1.1. Condition aux limites dynamique pour des petites perturbations

Nous avons vu au chapitre II que nous avons la possibilité de poursuivre l'étude du modèle monophasé en nous limitant au cas des petites perturbations autour d'un régime permanent. Ce cas est par ailleurs fort intéressant physiquement.

Se donnant pour la vitesse la forme définie par (II-6) :

$$u_o = u_{oo} + v_o e^{ct} \quad (\text{II-6})$$

où  $v_o$  est un infiniment petit du premier ordre devant  $u_{oo}$  et  $c$  une constante complexe, le but de ce chapitre sera d'explicitier, en fonction des paramètres du modèle et de  $v_o$  et  $c$ , les différents termes de l'équation (II-14') traduisant la condition aux limites dynamique.

Après linéarisation et division par  $v_o$  qui doit apparaître en facteur du fait de cette linéarisation, nous obtiendrons une équation en  $c$  dont les racines portées dans (II-6) donneront des solutions particulières pour le problème posé (détermination du comportement transitoire du système).

##### 4.1.2. Signification physique des racines de l'équation en $c$

Nous avons admis (chapitre II) que la linéarisation conservait les solutions du problème et nous avons vu que la solution générale de l'équation

linéarisée est une forme linéaire de ces solutions particulières.

En conséquence, pour un ensemble  $(g, f, u_{00}, l_0, l_1, s)$  de paramètres satisfaisant à la condition établie au chapitre III, plusieurs cas sont possibles :

- si l'équation en  $c$  ne possède que des racines à partie réelle négative, toute solution générale  $u_0 = u_{00} + \sum_i v_{0i} e^{c_i t}$  tendra, lorsque le temps augmentera indéfiniment, vers  $u_{00}$  : les petites perturbations sont amorties : le système est stable ;
- si l'équation en  $c$  ne possède que des racines à partie réelle négative ou nulle, l'une au moins étant nulle, toute solution générale tendra, lorsque le temps augmentera indéfiniment, vers une solution périodique : le système oscille ;
- si l'équation en  $c$  possède au moins une racine à partie réelle positive, toute solution générale présentera une amplitude croissante avec le temps. Dès que cette amplitude n'est plus petite devant  $u_{00}$ , la linéarisation n'est plus valable ; on ne peut prédire si l'amplitude croîtra indéfiniment (comme pour l'équation linéarisée) ou si elle sera limitée par des termes non linéaires (ce qui, au moins dans certains cas, est probable). On est sûr cependant que le système n'est pas stable.

A priori, on peut passer du premier cas au troisième, lorsque les paramètres du modèle varient, de trois façons :

- l'une au moins des racines est une fonction discontinue des paramètres du modèle et la partie réelle, d'abord négative et finie, devient brusquement positive et finie ;
- la partie réelle d'une des racines, d'abord négative, augmente indéfiniment en valeur absolue, puis devient positive et infiniment grande ;
- pour l'une des racines, la partie réelle s'annule.

Les deux premières façons ci-dessus sont peu probables, l'équation en  $c$  étant, d'après ce que nous en savons (équation (II-14')), relativement simple. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous aurons établi l'équation. Si nous supposons ces deux cas éliminés, lorsque les paramètres du modèle varient à partir d'un cas où toutes les racines  $c$  sont à partie réelle négative, les parties réelles de ces racines ne peuvent changer de signe qu'en s'annulant.

Au moment où la première partie réelle s'annule, le système, qui jusque là était stable, possède une solution périodique : nous sommes à un seuil d'instabilité.

Ayant une racine à partie réelle positive, remarquons que, si les paramètres du système continuent d'évoluer, la partie réelle d'une seconde racine s'annule, il ne se passe rien (le système n'est pas stable de toutes façons). En particulier, il ne s'agit pas d'un nouveau seuil.

#### 4.1.3. Seuils d'instabilité

Réciproquement, si, toutes les racines étant à partie réelle négative et les paramètres du système évoluant, l'une de ces parties réelles s'annule, deux cas sont possibles :

- le système est en train de passer d'un domaine  $(g, f, u_{00}, l_0, l_1, s)$ , où toutes les racines sont à partie réelle négative, à un domaine où une des racines est à partie réelle positive : nous sommes à un seuil d'instabilité, conformément à la définition adoptée dans la première partie,
- dans le plan complexe, la trajectoire de la racine considérée est tangente à l'axe imaginaire, ceci quelle que soit l'évolution ultérieure des paramètres du modèle. Nous sommes en un point où le système possède effectivement une solution périodique mais n'est pas à un seuil d'instabilité, car il est stable en tout point voisin. Il s'agit d'un cas très particulier, peu probable, ce que nous allons vérifier.

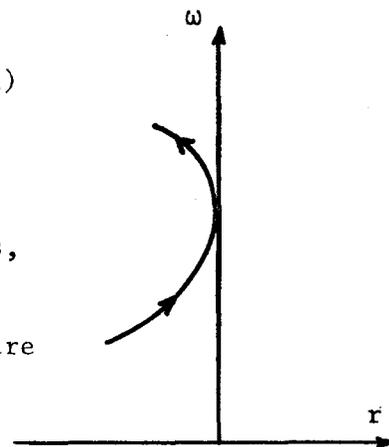
Posons :

$$c = r + i \omega \quad (\text{IV-1})$$

où  $r$  et  $\omega$  sont des nombres réels.

Les paramètres du modèle étant réels, le premier membre de l'équation en  $c$  se décompose en deux parties, réelle et imaginaire pure, donnant deux équations dont tous les coefficients sont réels :

$$\begin{aligned} \phi_1 (g, f, u_{00}, l_0, l_1, s, r, \omega) &= 0 \\ \phi_2 (g, f, u_{00}, l_0, l_1, s, r, \omega) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-2})$$



L'élimination de  $\omega$  entre ces deux équations conduit à une équation :

$$\phi_3 (g, f, u_{00}, l_0, l_1, s, r) = 0 \quad (\text{IV-3})$$

représentée pour une valeur donnée de  $r$ , par une surface dans l'espace à six dimensions des paramètres du modèle. Soit  $(\Sigma)$  la surface correspondant à  $r = 0$  et  $A$  un point de cette surface, tel qu'on puisse trouver un point voisin appartenant au domaine de stabilité. Soit  $(\Gamma)$  une courbe traversant la surface  $(\Sigma)$  au point  $A$  appartenant d'un côté de  $(\Sigma)$  au domaine de stabilité, et soit  $q$  l'abscisse curviligne sur cette courbe (origine en  $A$ ). Sur la courbe  $(\Gamma)$  les paramètres du système sont des fonctions de  $q$ , qui, portés dans  $\phi_3 = 0$ , donnent  $\phi_\Gamma (r, q) = 0$  pour  $r = 0, q = 0$ .

La condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas particulier ci-dessus, c'est-à-dire pour que  $A$  (point où le système possède une solution périodique) ne soit pas un seuil, est que  $r = 0$ , soit en  $A$  racine double de  $\phi_\Gamma = 0$ , quelle que soit la courbe  $(\Gamma)$  :

$$\frac{\partial \phi_\Gamma}{\partial q} = 0 \quad \text{pour } q = 0$$

Or :

$$\frac{\partial \phi_{\Gamma}}{\partial q} = \frac{\partial \phi_3}{\partial g} \left( \frac{dg}{dq} \right)_{\Gamma} + \frac{\partial \phi_3}{\partial f} \left( \frac{df}{dq} \right)_{\Gamma} + \dots + \frac{\partial \phi_3}{\partial s} \left( \frac{ds}{dq} \right)_{\Gamma}$$

Les dérivées  $\left( \frac{dg}{dq} \right)_{\Gamma}$  ----  $\left( \frac{ds}{dq} \right)_{\Gamma}$  prises pour  $q = 0$  sont des coefficients numériques.

Lorsque  $\Gamma$  varie, ces coefficients varient. La condition nécessaire et suffisante donne finalement :

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial g} = \frac{\partial \phi_3}{\partial f} = \dots = \frac{\partial \phi_3}{\partial s} = 0$$

On ne pourra écrire analytiquement ni  $\phi_3$  ni cette condition,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  étant trop compliqués. Mais on constate que les points A, non seuils, ne peuvent être, s'ils existent, que des points très particuliers de la surface ( $\Sigma$ ) et que, dans la mesure où  $\phi_3$  est compliqué, ils ont fort peu de chance d'exister. Nous ne nous en préoccupons plus à l'avenir.

#### 4.1.4.

En résumé, le système étant représenté par un point dans l'espace à six dimensions des paramètres du modèle, il y a correspondance biunivoque entre les seuils d'instabilité cherchés et les racines de l'équation en  $c$  à partie réelle nulle, si, et seulement si :

- on peut trouver un domaine au voisinage de ce point où le système est stable (c'est-à-dire où il n'y a que des racines  $c$  à partie réelle négative),
- l'équation en  $c$  n'admet, au voisinage de ce point, ni racine à partie réelle positive infiniment grande, ni racine fonction discontinue des paramètres.

## 4.2. EQUATION EN C

Le point de départ est l'équation (II-14') rappelée ici :

$$\begin{aligned} & (1_0 + \lambda + \xi + \xi_1) \frac{dv}{dt} + f (1_0 + \lambda + \xi + \xi_1) (2 u_{00} + v) v + (v - \frac{d\lambda}{dt}) \xi - \frac{d\lambda}{dt} \xi_1 \\ & + 2 f v [\eta - \lambda \xi + \xi_1 (1 - \lambda)] + u_{00} (\xi - \xi_0) + (g + f u_{00}^2) (\xi + \lambda - \xi_0 - \lambda_0) \\ & + (1 + 2 f u_{00}) [\eta - \lambda \xi - (\eta_0 - \lambda_0 \xi_0)] + f [(\xi - 2 \lambda \eta + \lambda^2 \xi) - (\xi_0 - 2 \lambda_0 \eta_0 + \lambda_0^2 \xi_0)] \\ & + [g + f(u_{00} + 1)^2] (\xi_1 - \xi_{10}) - 2 f (u_{00} + 1) (\lambda \xi_1 - \lambda_0 \xi_{10}) + f (\lambda^2 \xi_1 - \lambda_0^2 \xi_{10}) = 0 \end{aligned}$$

Il faut expliciter  $\lambda$ ,  $\frac{d\lambda}{dt}$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\xi_1$ , en fonction des paramètres du modèle et de  $v_0$  et  $c$ , puis les reporter ici en linéarisant l'équation obtenue, c'est-à-dire en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Ce calcul est fait en annexe V en supposant  $c \neq 0$ ,  $c \neq 1$ ,  $c \neq 2$ , ce qui ne restreint pas la généralité des calculs.

- le cas  $c = 0$  correspond, d'après (II-6), à  $u_0 = \text{cte} = u_{00} + v_0$ . Possédant un régime permanent défini par  $(g, f, u_{00}, l_0, l_1, s)$  il revient à la recherche d'un régime permanent infiniment voisin  $(g, f, u_{00} + v_0, l_0, l_1, s)$ . Etant donné la condition aux limites (I-14), ce cas se ramène à l'étude de la relation  $\frac{\partial \Delta p}{\partial u_{00}} = 0$  faite au chapitre III,
- les cas  $c = 1$  et  $c = 2$  sont des cas particuliers sans grand intérêt pour nous (solution à partie réelle positive).

L'équation en  $c$  s'écrit :

$$B_1 g + B_2 f u_{00} + B_3 = 0 \quad (\text{IV-4})$$

avec :

$$B_1 = -\frac{E_s E_y m^{-c}}{c(1-c)} + \frac{E_s E_y m^{-1}}{c^2(1-c)} - \frac{(E_s + E_y) m^{-1}}{c^2} + \frac{m^{-1}(1-c)}{c^2} + \frac{1}{c}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 = & - m^2 u_{00} \frac{E_s E_y m^{-c}}{c(1-c)} + m u_{00} \frac{E_s E_y}{c^2(1-c)} + 2 m^2 u_{00} \frac{E_s m^{-c}}{c(1-c)(2-c)} \\
 & - \frac{E_s}{1-c} \left[ \frac{u_{00}}{2-c} + 1 - u_{00} s + \frac{m u_{00}}{c^2} \right] + \frac{E_s (1 - u_{00} s + 2 l_1)}{c} \\
 & - m u_{00} \frac{E_y}{c^2} - \frac{1 - u_{00} s + 2 l_1}{c} + \frac{m u_{00}}{c^2} + 2 (l_0 + 1 + l_1) \\
 B_3 = & m u_{00} \frac{E_s m^{-c}}{(1-c)^2} + E_s \left[ \frac{u_{00}}{c} - \frac{u_{00} k c}{1-c} - \frac{u_{00}}{(1-c)^2} + \frac{l_1}{m} \right] \\
 & + (l_0 + u_{00} s + u_{00} k + \frac{l_1}{m}) c - \frac{u_{00}}{c} - \frac{l_1}{m}
 \end{aligned} \tag{IV-5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{où : } \quad m &= 1 - s + \frac{1}{u_{00}} \\
 k &= \text{Log } m \\
 y &= \frac{l_1}{m u_{00}} \\
 E_s &= e^{-cs} \\
 E_y &= e^{-cy}
 \end{aligned} \tag{IV-6}$$

#### 4.3. SEUILS D'INSTABILITES - EQUATIONS EN $\omega$

D'après la conclusion du paragraphe 4.1. ci-dessus, pour que les racines à partie réelle nulle de l'équation en  $c$  (IV-4) correspondent à des seuils d'instabilité, il faut notamment que les racines complexes de cette équation soient des fonctions continues des paramètres du modèle ( $g, f, u_{00}, l_0, l_1, s$ ) et que la partie réelle de ces racines ne puisse jamais tendre vers  $+\infty$ . Le premier membre de (IV-4) est une fonction continue de  $f, g$  et  $u_{00}$ ; de même les différents termes de  $B_1, B, B_2$  sont des fonctions continues de  $u_{00}, l_0, l_1, s$ .

Nous admettrons que, dans ces conditions, les racines de (IV-4) sont des fonctions continues des paramètres (le passage à l'infini n'est pas considéré ici comme une discontinuité).

Si la partie réelle  $r$  de  $c$  tend vers  $+\infty$ ,  $E_s$ ,  $E_y$ ,  $m^{-c}$  tendent vers zéro, si  $s$  et  $y$  sont différents de zéro, car  $s$ ,  $y$  et  $\text{Log } m$  sont positifs. Si  $s$  ou  $y$  est nul,  $E_s$  ou  $E_y$  est égal à 1 quel que soit  $c$ .

Donc :

$$B_1 \rightarrow 0$$

$$B_2 \rightarrow 2 (l_0 + l + l_1)$$

$$B_3 \rightarrow (E_s - 1) \frac{l_1}{m} + (l_0 + u_{00} s + u_{00} k + \frac{l_1}{m}) c \rightarrow \infty$$

l'expression entre parenthèses n'est jamais nulle. Une valeur de  $c$  à partie réelle positive et infiniment grande ne peut être racine de l'équation (IV-4).

Dès lors, nous pouvons étudier les racines à partie réelle nulle de l'équation en  $c$ .

D'après la conclusion du paragraphe 4.1, ayant la surface  $(\Sigma)$  définie par (IV-3) pour  $r = 0$  :

$$\phi_3 (g, f, u_{00}, l_0, l_1, s, r = 0) = 0$$

nous en déduisons facilement la surface seuil connaissant le domaine de stabilité.

#### 4.3.2. Equations en $\omega$

Le système d'équations en  $\omega$  est le système (IV-2) ci-dessus dans lequel on égale  $r$  à zéro.

Ces équations s'obtiennent en portant  $c = i\omega$  dans l'équation en  $c$  (IV-4) et en séparant partie réelle et partie imaginaire. Ce calcul est fait en annexe VI.  $\omega$  est la pulsation d'une éventuelle solution oscillante "pure", c'est-à-dire ni amortie, ni amplifiée.

On peut supposer  $\omega > 0$  sans restreindre la généralité (le changement de  $\omega$  en  $-\omega$  ne change rien. On a vu au paragraphe 4.2. à quoi correspond  $\omega = 0$ ).

Le système d'équations en  $\omega$  s'écrit (la première équation correspondant à la partie réelle de IV.4) :

$$\begin{aligned} a_1 g + a_2 u_{00} f + a_3 &= 0 \\ b_1 g + b_2 u_{00} f + b_3 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-7})$$

avec les formules suivantes (IV-8) :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-1}{1+\omega^2} \left[ \cos (K+S+Y) - \frac{\sin (K+S+Y)}{\omega} \right] - \frac{1}{m \omega^2 (1+\omega^2)} \left[ \cos (S+Y) + \omega \sin (S+Y) \right] \\ &\quad + \frac{\cos S + \cos Y - 1}{m \omega^2} \\ b_1 &= \frac{1}{\omega (1+\omega^2)} \left[ \cos (K+S+Y) + \omega \sin (K+S+Y) \right] - \frac{1}{m \omega (1+\omega^2)} \left[ \cos (S+Y) - \frac{\sin (S+Y)}{\omega} \right] \\ &\quad - \frac{\sin S + \sin Y}{m \omega^2} + \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{m} - 1 \right) \\ a_2 &= \frac{-m^2 u_{00}}{1+\omega^2} \left[ \cos (K+S+Y) - \frac{\sin (K+S+Y)}{\omega} \right] - \frac{m u_{00}}{\omega^2 (1+\omega^2)} \left[ \cos (S+Y) + \omega \sin (S+Y) \right] \\ &\quad + \frac{2 m^2 u_{00}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \left[ 3 \cos (K+S) + \left( \omega - \frac{2}{\omega} \right) \sin (K+S) \right] \\ &\quad - \frac{\cos S}{1+\omega^2} \left[ \frac{(2-\omega^2) u_{00}}{4+\omega^2} + 1 - u_{00} s - \frac{m u_{00}}{\omega^2} \right] \\ &\quad - \sin S \left[ \frac{3 \omega u_{00}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} + \frac{\omega(1-u_{00}s)}{1+\omega^2} - \frac{m u_{00}}{\omega(1+\omega^2)} + \frac{1-u_{00}s+2 l_1}{\omega} \right] \\ &\quad - \frac{m u_{00}}{\omega^2} (1 - \cos Y) + 2 (l_0 + l + l_1) \\ b_2 &= \frac{m^2 u_{00}}{\omega (1+\omega^2)} \left[ \cos (K+S+Y) + \omega \sin (K+S+Y) \right] - \frac{m u_{00}}{\omega (1+\omega^2)} \left[ \cos (S+Y) - \frac{\sin (S+Y)}{\omega} \right] \end{aligned}$$

.../...

.../...

$$\begin{aligned}
& + \frac{2 m^2 u_{00}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} \left[ \left(\omega - \frac{2}{\omega}\right) \cos (K+S) - 3 \sin (K+S) \right] \\
& - \cos S \left[ \frac{3 \omega u_{00}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} + \frac{\omega(1-u_{00}s)}{1+\omega^2} - \frac{m u_{00}}{\omega(1+\omega^2)} + \frac{1-u_{00}s+2 l_1}{\omega} \right] \\
& + \frac{\sin S}{1+\omega^2} \left[ \frac{(2-\omega^2) u_{00}}{4+\omega^2} + 1 - u_{00} s - \frac{m u_{00}}{\omega^2} \right] \\
& - \frac{m u_{00} \sin Y}{\omega^2} + \frac{1-u_{00} s+2 l_1}{\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_s & = \frac{m u_{00}}{(1+\omega^2)^2} \left[ (1-\omega^2) \cos (K+S) + 2 \omega \sin (K+S) \right] \\
& + \cos S \left[ \frac{u_{00} k \omega^2}{1+\omega^2} - \frac{u_{00}(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2} + \frac{l_1}{m} \right] - \sin S \left[ \frac{u_{00}}{\omega} + \frac{u_{00} k \omega}{1+\omega^2} + \frac{2 u_{00} \omega}{(1+\omega^2)^2} \right] - \frac{l_1}{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_s & = \frac{m u_{00}}{(1+\omega^2)^2} \left[ 2 \omega \cos (K+S) - (1-\omega^2) \sin (K+S) \right] \\
& - \cos \left[ \frac{u_{00}}{\omega} + \frac{u_{00} k \omega}{1+\omega^2} + \frac{2 u_{00} \omega}{(1+\omega^2)^2} \right] - \sin S \left[ \frac{u_{00} k \omega^2}{1+\omega^2} - \frac{u_{00}(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2} + \frac{l_1}{m} \right] \\
& + (l_0 + u_{00} s + u_{00} k + \frac{l_1}{m}) \omega + \frac{u_{00}}{\omega}
\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
K & = \omega k = \omega \operatorname{Log} \left( 1 - s + \frac{1}{u_{00}} \right) \\
S & = \omega s \\
Y & = \omega y = \frac{\omega l_1}{1 + (1-s) u_{00}}
\end{aligned} \tag{IV-9}$$

4.3.3. Equation de la surface ( $\Sigma$ )

Le système (IV-7) est la forme explicitée du système (IV-2). L'équation de la surface ( $\Sigma$ ) s'obtiendrait en éliminant  $\omega$  entre les deux équations (IV-7).  $\omega$  intervient dans (IV-7) sous forme transcendante par les sinus et cosinus de :

$$\begin{aligned}
(K + S + Y) & = \omega (k + s + y) \\
(S + Y) & = \omega (s + y)
\end{aligned}$$

$$(K + S) = \omega (k + s)$$

$$S = \omega s$$

$$Y = \omega y$$

L'élimination de  $\omega$  est donc impossible et il faut considérer la surface  $(\Sigma)$  comme définie paramétriquement par (IV-7).

Comme la condition aux limites dynamique, dont elles sont issues, les équations (IV-7) sont linéaires en  $g$  et  $f$ . Cette remarque sera utile pour la résolution numérique (voir chapitre VI).

#### 4.4. CONCLUSION

Pour de petites perturbations, le système, représenté par un point dans l'espace à six dimensions des paramètres du modèle ( $g, f, u_{00}, l_0, l_1, s$ ), peut être soit stable, soit instable (oscillations amplifiées). La stabilité est déterminée par la position du point représentatif par rapport à une "surface seuil" sur laquelle le système oscille indéfiniment.

Cette "surface seuil" est une portion d'une surface plus importante  $(\Sigma)$  définie par un système de deux équations comportant comme paramètre la pulsation  $\omega$  d'une solution oscillante pure. Connaissant  $(\Sigma)$  et un domaine où le système est stable, on peut étendre ce domaine jusqu'à la rencontre de  $(\Sigma)$  ou celle de la surface  $(S)$  délimitant les domaines impossibles étudiés au chapitre III : la surface seuil se compose de toutes les portions de  $(\Sigma)$  appartenant au domaine d'existence du régime permanent et limitant un domaine de stabilité.

Dans le chapitre suivant nous verrons quels renseignements on peut tirer de l'équation en  $c$  et de l'équation de la surface  $(\Sigma)$  avant de passer à l'étude arithmétique dans le chapitre VI.

## CHAPITRE V

### ETUDE ANALYTIQUE

#### 5.1. INTRODUCTION

Différentes considérations, d'ordre mathématique ou physique (voir chapitre II), nous ont conduits à nous limiter à l'étude de petites perturbations autour d'un régime permanent.

La solution générale du problème du comportement du modèle peut alors être mise sous la forme :

$$u_o = u_{oo} + \sum_i v_{oi} e^{c_i t} \quad (V-1)$$

où  $u_o(t)$  est la vitesse réduite à l'entrée et  $u_{oo}$  la vitesse réduite du régime permanent considéré, où les  $v_{oi}$  sont des constantes réelles arbitraires et où les constantes complexes  $c_i$  sont les racines de "l'équation en  $c$ " écrite au chapitre précédent.

Ayant cette solution générale (V-1) et un ensemble de valeurs de  $v_{oi}$  satisfaisant aux conditions initiales, on connaît, au moyen des formules (I-17) à (I-20) du chapitre I, les fonctions  $\lambda(t)$ , donnant la longueur réduite de la zone chauffante à masse spécifique constante, puis  $u(z, t)$  vitesse réduite du fluide.

Prenant alors comme variables indépendantes définissant une particule  $t$  et  $\tau$ <sup>1)</sup> plus commodes, mais équivalentes (cf. chapitre I) à  $z$  et  $t$ , les mêmes formules permettent de calculer  $z(t, \tau)$  abscisse réduite

---

1) On rappelle la signification physique de  $\tau$  : c'est en temps réduit, l'instant où la particule atteint l'enthalpie 0, à partir de laquelle la masse spécifique devient une fonction de l'enthalpie.

de la particule,  $u(t, \tau)$  vitesse réduite de la particule,  $\rho(t, \tau)$  masse spécifique réduite, puis réintroduisant les paramètres  $w$  puissance volumique réduite et  $h_c$  enthalpie "caractéristique" réduite, l'enthalpie réduite  $h$ .

Le système est alors parfaitement décrit.

L'"équation en  $c$ " établie au chapitre IV peut donc être considérée comme l'"équation" du modèle. Comme elle est issue directement de la condition aux limites dynamique, ceci justifie la remarque placée en fin de chapitre I, concernant l'importance de cette condition.

L'"équation en  $c$ " relie  $c$  aux paramètres du modèle  $g, f, u_{00}, l_0, l_1, s$  et est de la forme :

$$B_1 g + B_2 f u_{00} + B_3 = 0 \quad (\text{IV-4})$$

où  $B_1, B_2, B_3$  sont fonction d'une part des quatre paramètres  $u_{00}, l_0, l_1, s$  et d'autre part de  $c$ .

$B_1, B_2, B_3$  sont donnés par des formules assez compliquées, qu'on trouvera en (IV-5).

L'aspect physique du problème d'une part (apparition d'un phénomène parasite), sa formulation mathématique d'autre part (petites perturbations, incapables de rendre compte de phénomènes d'amplitude finie) concentrent l'intérêt sur les seuils d'oscillations. Ces seuils sont placés (cf. chapitre précédent) sur une surface ( $\Sigma$ ) définie paramétriquement par un système de deux "équations en  $\omega$ " issues de l'"équation en  $c$ " ( $\omega$  est la pulsation réduite au seuil) :

$$\begin{cases} a_1 g + a_2 f u_{00} + a_3 = 0 \\ b_1 g + b_2 f u_{00} + b_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV-7})$$

où les  $a_i$  et les  $b_i$  sont des fonctions de  $u_{00}, l_0, l_1, s$  et  $\omega$ , données par des formules assez compliquées qu'on trouvera en (IV-8).

L'examen des formules (IV-5) ou (IV-8) montre qu'il est impossible de poursuivre analytiquement l'étude du cas général, mais le nombre de paramètres relativement faible justifie une étude numérique qui sera faite dans le chapitre suivant.

Il est intéressant, avant cette étude numérique, de réunir analytiquement le plus possible de renseignements sur des cas particuliers ou des cas limites. Nous serons guidés dans cette étude par la signification physique des paramètres en jeu. Etant donné l'importance de cet aspect physique nous y consacrons un paragraphe spécial.

Comme au chapitre III, le système est représenté par un point dans l'espace à trois dimensions des paramètres "fondamentaux"  $g, f, u_{00}$ , les paramètres "supplémentaires"  $l_0, l_1, s$  étant bloqués.

## 5.2. SIGNIFICATION PHYSIQUE DES PARAMETRES ET GROUPEMENTS ADIMENSIONNELS

Par raison d'homogénéité, nous reprendrons la liste complète, même si cette signification est évidente ou a déjà été donnée.

Le temps caractéristique  $\Theta_c$  jouant un grand rôle dans l'analyse dimensionnelle, nous commencerons par donner sa signification.

### 5.2.1 Temps caractéristique $\Theta_c$

D'après l'équation  $\rho = e^{-(t-\tau)}$  tirée de (I-19) lorsque  $t$ , temps réduit, augmente d'une unité à  $\tau$  constant, c'est-à-dire lorsque le temps  $T$  augmente de la valeur  $\Theta_c$  pour une particule donnée, la masse spécifique (réduite ou dimensionnelle) est divisée par  $e$ .

Le temps caractéristique  $\Theta_c$  est le temps nécessaire pour qu'une particule fluide de masse donnée, initialement à l'enthalpie 0 (ou à une enthalpie positive quelconque), voit son volume multiplié par  $e$ , sous l'effet du chauffage.

D'après la formule (I-1) de définition de la masse spécifique, ceci correspond à une multiplication par  $e$  de  $(H + H_c)$ .

Si à l'instant initial  $H = 0$ , à l'instant  $\Theta_c$   $H + H_c = e H_c$  :

$$H (T = \Theta_c) = (e - 1) H_c$$

Les longueurs chauffantes courantes étant de l'ordre du mètre et les vitesses à l'entrée de l'ordre du mètre par seconde, il faut moins d'une seconde à une particule chauffée se dilatant pour parcourir la zone chauffante. Le temps  $\Theta_c$  caractérisant en quelque sorte la "violence" de l'"effet de densité", on conçoit que cet effet ne puisse jouer le rôle fondamental que si, dans le canal chauffé, le volume est multiplié par un nombre assez grand. Si l'hypothèse ayant conduit à la formulation du modèle (importance de cet effet de densité) est correcte, le raisonnement conduit à des temps  $\Theta_c$ , au seuil de l'ordre de la seconde ou plus petits (On verra qu'ils sont plutôt de l'ordre du cinquième de seconde). Il y a donc une gamme de valeurs "critiques" de  $\Theta_c$ .

### 5.2.2. Paramètre adimensionnel de "débit" $u_{oo}$

Par définition :

$$u_{oo} = \frac{U_{oo} \Theta_c}{L_c} = \frac{U_{oo}}{L_c / \Theta_c}$$

$U_{oo}$  étant la vitesse de régime permanent à l'entrée.

En régime permanent, pour une entrée "à saturation" ( $s = 0$ ,  $\lambda = 0$ ) :

$$z(t, \tau) = u_{oo} \left( e^{(t-\tau)} - 1 \right) \quad (\text{formule (3) annexe IV})$$

et, d'après (I-19),  $u = u_{oo} + z = u_{oo} e^{(t-\tau)}$

Suivons la particule qui entre dans le canal chauffant à l'instant  $t = 0$  (elle correspond à  $\tau = 0$ ) et repassons en variables dimensionnelles. La vitesse de cette particule à l'instant  $T$  est :

$$U = U_{oo} e^{T/\Theta_c}$$

(Cette formule est d'ailleurs évidente puisque  $R = R_0 e^{-T/\theta_c}$  et que l'équation de continuité s'écrit alors  $RU = \text{constante} = R_0 U_{00}$ ).

Le dénominateur de  $u_{00}$  est une vitesse  $L_c/\theta_c$  qui, prise à l'entrée, correspondrait pour une particule fluide passant par l'origine au temps initial, à une vitesse :

$$U = \frac{L_c}{\theta_c} e^{T/\theta_c}$$

donc à une abscisse :

$$Z = \int_0^T \frac{L_c}{\theta_c} e^{T/\theta_c} dT = L_c (e^{T/\theta_c} - 1)$$

En particulier, on aurait  $Z = L_c$  pour  $e^{T/\theta_c} = 2$  ou :

$$T = \theta_c \text{ Log } 2$$

et, au même instant,  $R = R_0/2$  puisque  $R = R_0 e^{-T/\theta_c}$

Dès lors, la signification physique de  $u_{00}$  est évidente : c'est le rapport entre les vitesses à l'entrée du régime permanent réel et d'un régime permanent dans lequel une particule donnée, entrant à enthalpie nulle, doublerait de volume pendant son temps de parcours du canal chauffant.

Les mêmes raisons qui nous ont fait attribuer au temps  $\theta_c$  au seuil des valeurs inférieures à la seconde, nous conduisent à penser que les valeurs de  $u_{00}$  au seuil seront inférieures à l'unité. Pour  $u_{00}$ , comme pour  $\theta_c$ , il y a une gamme de "valeurs critiques".

### 5.2.3. Paramètre adimensionnel de "gravité" $g$

Par définition :

$$g = \frac{G \sin \varphi \theta_c^2}{L_c} = \frac{G \sin \varphi}{L_c/\theta_c^2}$$

Reprenant la particule imaginaire du paragraphe précédent, on constate que son accélération serait :

$$\frac{DU}{DT} = \frac{L_c}{\Theta_c^2} e^{T/\Theta_c}$$

correspondant à une accélération initiale  $\frac{L_c}{\Theta_c^2}$ .

g est le rapport entre l'accélération due au champ de gravité et l'accélération initiale qu'aurait une particule, entrant à enthalpie nulle avec une vitesse telle qu'elle doublerait de volume pendant son temps de parcours du canal chauffant.

Le paramètre g traduit donc la plus ou moins grande influence du champ de gravité sur le comportement du modèle. On ne peut lui attribuer, comme aux précédents ( $\Theta_c$  et  $u_{00}$ ) une valeur "critique" au seuil. Il agit plutôt en modifiant la dynamique du système donc la valeur critique de  $u_{00}$ , et on ne peut prévoir a priori le sens de cette influence.

Notons que g peut être positif, nul ou négatif.

#### 5.2.4. Paramètre adimensionnel de "frottement" f

Par définition :

$$f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D}$$

Sa signification physique est évidente. La perte de pression par frottement est :

$$\int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} \Lambda \frac{R U^2}{2} \frac{dZ}{D}$$

Pour un écoulement non chauffé, 2 f exprimerait la perte de charge du canal "chauffant" en nombre de fois  $\frac{1}{2} R U^2$  (énergie cinétique de l'unité de volume).

C'est une notion classique en Mécanique des Fluides. f traduit l'influence plus ou moins grande de l'amortissement par dissipation. Comme

pour g on ne peut prévoir a priori le sens de cette influence (cf. remarque en fin de § 2.3.2.).

#### 5.2.5. Paramètre adimensionnel de longueur de zone adiabatique amont $l_0$

$$\text{Par définition, } l_0 = \frac{L_0}{L_c}$$

c'est le rapport de la longueur de la zone considérée à celle du canal chauffant. Lorsque le modèle comporte des singularités géométriques (voir annexe I), on est amené à remplacer le paramètre unique  $l_0$  par trois paramètres :

- $l_0$  inertie : longueur équivalente d'inertie. C'est la longueur (réduite) d'une zone fictive de mêmes caractéristiques géométriques que le canal chauffant (diamètre, inclinaison, rugosité) ayant le même comportement que la zone réelle du point de vue inertie. Elle dépend des longueurs réelles et des sections ;
- $l_0$  gravité : longueur équivalente de gravité. Sa définition est la même en se plaçant cette fois du point de vue hydrostatique. Elle dépend des longueurs réelles et des inclinaisons ;
- $l_0$  frottement : longueur équivalente de frottement. Sa définition est la même en se plaçant du point de vue frottement. Elle dépend des longueurs réelles, des sections, des coefficients de frottement et des singularités.

Ces trois longueurs équivalentes sont indépendantes l'une de l'autre.

Le terme hydrostatique de perte de pression pour la zone adiabatique amont est constant pour une géométrie et un fluide donné.

Lorsqu'on écrit la condition aux limites dynamiques :

$$\Delta P = - \int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} \frac{\partial P}{\partial Z} dz$$

on peut donc le faire passer dans le premier membre, ce qui change simplement la valeur de la constante  $\Delta P$ . La longueur équivalente de gravité n'est pas un paramètre. On vérifie qu'effectivement  $l_0$  n'intervient pas dans les formules définissant  $a_1$  et  $b_1$  (cf. formules IV-8).

On peut finalement considérer  $l_0$  comme représentant en fait deux paramètres indépendants ( $l_0$  inertie) et ( $l_0$  frottement).

Ces paramètres agissent en modifiant le comportement dynamique du système. On peut penser a priori que leur augmentation améliore la stabilité.

#### 5.2.6. Paramètre adimensionnel de longueur de zone adiabatique aval $l_1$

$$\text{Par définition, } l_1 = \frac{L_1}{L_c}$$

c'est le rapport de la longueur de la zone considérée à celle du canal chauffant. Lorsque le modèle comporte des singularités géométriques (voir annexe I) on est amené, comme au paragraphe précédent, à remplacer le paramètre unique  $l_1$  par trois paramètres indépendants analogues à ceux du paragraphe précédent, mais cette fois de manière approchée, dont seule l'étude numérique nous indiquera la légitimité.

On peut, sous ces réserves, considérer  $l_1$  comme représentant en fait trois paramètres indépendants ( $l_1$  inertie),  $l_1$  (gravité),  $l_1$  (frottement), qui agissent en modifiant le comportement dynamique du système. On ne peut prévoir a priori le sens de cette influence.

#### 5.2.7. Paramètre adimensionnel de sous-saturation $s$

$$\text{Par définition, } s = \frac{H_0}{H_c}$$

c'est le rapport entre la "sous-saturation" à l'entrée  $H_0$  et l'augmentation d'enthalpie correspondant, pour une particule à enthalpie initiale nulle, à un doublement du volume de cette particule.

Le paramètre  $s$  agit notamment en modifiant la longueur sur laquelle apparaît l'effet de densité. Une augmentation de  $s$  devrait donc être favorable à la stabilité (les autres paramètres étant fixés). On verra au chapitre suivant que ce n'est pas toujours vrai.

#### 5.2.8. Remarque sur les paramètres du modèle

Cette étude qualitative de la signification des paramètres conduit logiquement à définir le seuil par  $u_{00}$  :

$$u_{00} = u_{00}(g, f, l_0, l_1, s)$$

ce qui est compatible avec la représentation adoptée depuis le chapitre III et qui consiste à définir  $u_{00}$  sous la forme :

$$u_{00} = u_{00}(g, f) \text{ paramétrée en } l_0, l_1, s.$$

#### 5.2.9. Autres paramètres et groupements

a) Retards : L'équation en  $c$  (IV-4) comporte des termes en :

$$E_s = e^{-cs} \quad E_y = e^{-cy} \quad m^{-c} = e^{-ck}$$

Ces termes correspondent pour la condition aux limites dynamique (dont l'équation en  $c$  est issue par division par  $v_0 e^{ct}$ ) (cf. annexe V) à des termes :

$$v_0 e^{ct} e^{-cs} = v_0 e^{c(t-s)}, \quad v_0 e^{c(t-y)}, \quad v_0 e^{c(t-k)}$$

Ces termes introduisent donc des "retards" constants  $s, y, k$  entre la fonction  $v(t)$  et les différentes fonctions de  $v$  intervenant dans la condition aux limites. De plus, cette condition contient des produits de nombres complexes qui correspondent à des "déphasages". Retards (fonctions uniquement des paramètres du modèle) et déphasages (fonctions en sus de la fréquence) sont à la base même du mécanisme d'entretien des oscillations, ainsi qu'il a été vu au chapitre II,

Les trois retards sont :

- s - Nous avons déjà vu une signification physique de s représentant une sous-saturation. La formule (I-18) définissant :

$$\lambda = \int_{t-s}^t u_o(x) dx$$

montre que s est également le temps réduit nécessaire pour porter la particule de l'enthalpie d'entrée à l'enthalpie 0. En tant que retard s est le temps réduit de parcours de la zone chauffante à masse spécifique constante.

- k - Par définition (équation III-2)  $k = \text{Log } m = \text{Log} \left( 1 - s + \frac{1}{u_{oo}} \right)$ .

La valeur de la masse spécifique réduite dans la zone adiabatique aval est, en régime permanent :

$$\rho = m^{-1} \text{ (cf. annexe IV - § 5) et également d'après (I-20)}$$

$\rho = e^{-(t_1 - \tau)}$  où  $t_1$  est l'instant où la particule quitte la zone chauffante.

$$\text{On en déduit } k = t_1 - \tau .$$

k est, en régime permanent, le temps réduit de parcours de la zone chauffante à masse spécifique variable.

- y - Par définition (formule IV-6)  $y = \frac{l_1}{m u_{oo}}$ .

En régime permanent, dans la zone adiabatique aval la vitesse réduite u est une constante donnée par (I-20) :

$$u = u_{oo} - \lambda_o + 1$$

$$\text{Compte tenu de (III-2) } u = u_{oo} (1 - s) + 1 = m u_{oo} .$$

$m u_{oo}$  est la vitesse réduite en régime permanent dans la zone adiabatique aval et y est le temps réduit de parcours de cette zone adiabatique aval.

Ces trois retards interviennent dans l'équation "en c" sous les formes :

$s+k+y$  temps de parcours des zones chauffante et adiabatique aval (régime permanent).

$s+y$  somme des temps de parcours de la zone chauffante à masse spécifique constante et de la zone adiabatique aval (régime permanent). Les termes retardés correspondants proviennent de :

$$\xi_1 = \int_1^{1+l_1} \rho dz$$

Le retard  $s$  provient de  $\rho$ . Le retard  $y$  est introduit par l'intégration. Ce retard, groupant deux zones non contiguës paraît illogique. Il apparaît probablement par différence entre le retard précédent  $s+k+y$  et le retard  $k$ .

$s+k$  temps de parcours de la zone chauffante (régime permanent).

$s$  temps de parcours de la zone chauffante à masse spécifique constante.

$y$  temps de parcours de la zone adiabatique aval (régime permanent).

Seule la zone adiabatique amont n'introduit pas de retard, ce qui est logique puisqu'il ne s'y passe rien.

$s$  et  $y$  peuvent être nuls,  $k$  ne le peut pas. Un cas particulier très intéressant, que nous étudierons ci-dessous, sera celui où un seul retard s'introduit, c'est-à-dire où  $s = y \neq 0$ . (A la longueur adiabatique amont près, c'est d'ailleurs le cas qui nous a permis au chapitre II la mise en évidence du mécanisme moteur).

Sur le plan analytique, ce cas conduit à une équation ne comportant plus que les sinus et cosinus d'une seule fonction de  $\omega$ .

#### b) Autres groupements :

Quelques autres groupements interviennent au cours du calcul et

il peut être intéressant d'en connaître la signification physique :

- $\lambda$  est la longueur réduite de la zone chauffante à masse spécifique constante ; c'est également la masse réduite de fluide présente dans cette zone (où  $\rho = 1$ ) par unité de section ;
- $\xi$  est, par unité de section, la masse réduite de fluide présente dans la zone chauffante à masse spécifique variable ;
- $\eta/\xi$  est l'abscisse réduite du centre de gravité de cette masse ;
- $\zeta$  est, par unité de section, le moment d'inertie réduit de cette masse ;
- $\xi_1$  est, par unité de section, la masse réduite de fluide présente dans la zone adiabatique aval ;
- $m$  est le volume spécifique réduit, à la sortie de la zone chauffante, en régime permanent ;
- $m u_{00}$  est, on vient de le voir, la vitesse réduite dans la zone adiabatique aval (en régime permanent) ;
- $l - u_{00} s$  est la longueur réduite de la zone chauffante à masse spécifique variable (en régime permanent) ;
- $l_0 + l + l_1$  est la longueur réduite totale ;
- $(l_0 + u_{00} s + u_{00} k + \frac{l_1}{m}) = l_0 + \lambda_0 + \xi_0 + \xi_{10}$  est, par unité de section, la masse réduite totale en régime permanent.

Pour l'étude analytique proprement dite de l'équation en  $c$  et des équations en  $\omega$  nous étudierons, dans la mesure du possible, les problèmes suivants <sup>1)</sup> :

- influence des paramètres "supplémentaires"  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $s$  ;
- influence des paramètres  $g$  et  $f$  ;

---

1) Il n'est pas possible, pour des raisons matérielles évidentes, de reproduire dans chaque paragraphe les équations en  $c$  et en  $\omega$  (IV-4) et (IV-7). Le lecteur est prié de se reporter aux formules du chapitre IV.

- influence du paramètre  $u_{00}$  ;
- influence de la pulsation  $\omega$   
(qu'on peut considérer analytiquement, soit comme l'inconnue, soit comme un paramètre, ainsi que le suggère la forme du système (IV-7) ;
- étude du cas particulier  $s = y = 0$ .

Sauf indication contraire, nous supposerons toujours les paramètres du modèle et  $\omega$  finis et non nuls.

Rappelons :

- que les termes en  $g$  ( $B_1 g, a_1 g, b_1 g$ ) correspondent à des différences de pression hydrostatique,
- que les termes en  $f$  ( $B_2 f u_{00}, a_2 f u_{00}, b_2 f u_{00}$ ) sont des termes de frottement,
- que les termes ne contenant ni  $g$  ni  $f$  ( $B_3, a_3, b_3$ ) sont des termes d'inertie.

### 5.3. INFLUENCE DES PARAMETRES "SUPPLEMENTAIRES" $l_0, l_1, s$

#### 5.3.1. Longueur réduite de la zone adiabatique amont $l_0$

$l_0$  ne figure dans l'équation en  $c$  que par  $B_2$  et  $B_3$ , dans lesquels il intervient linéairement.

Ceci confirme son action, relativement simple, d'amortissement par frottement (dans  $B_2$ ) et par inertie (dans  $B_3$ ).

Si  $l_0$  s'annule, il ne se produit rien de remarquable.

$$\text{Si } l_0 \rightarrow \infty \quad B_2 \simeq 2 l_0 \rightarrow \infty$$

$$B_3 \simeq l_0 c$$

L'équation en  $c$  se réduit à :

$$2 f u_{00} + c = 0$$

qui n'a comme solution que  $c = -2 f u_{00}$  réel et négatif.

L'écoulement est évidemment stable.

On ne peut affirmer qu'une augmentation de  $l_0$  favorise toujours la stabilité, mais c'est probable.

Si le modèle comporte des singularités géométriques, il faut considérer séparément l'action de  $l_0$  en temps que paramètre de frottement et d'inertie. Si  $l_0$  frottement ou  $l_0$  inertie tend vers l'infini, l'équation en  $c$  n'a plus de solution. Physiquement c'est évident : perturber le système nécessite la mise en oeuvre d'une énergie infinie.

### 5.3.2. Longueur réduite de zone adiabatique aval $l_1$

$l_1$  figure dans l'équation en  $c$  directement par  $B_2$  et  $B_3$  et par l'intermédiaire de :

$$e^{-cy} = e^{-c \frac{l_1}{m u_{00}}}$$

(termes "retardés") dans  $B_1$  et  $B_2$ .

D'une part, comme  $l_0$ ,  $l_1$  augmente l'amortissement et l'inertie du système. D'autre part, grâce au retard qu'il introduit ou grâce à des retards introduits par ailleurs (termes en  $l_1 e^{-cs}$ ) il peut jouer un rôle moteur dans un phénomène d'instabilité.

Si  $l_1$  s'annule, il ne se produit rien de remarquable, si ce n'est une simplification des formules donnant  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  (IV-5) ou  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $a_3$ ,  $b_3$  (IV-8). Au lieu de cinq retards, il n'en reste que deux ( $s+k$ ) et  $s$ .

Si  $l_1$  augmente indéfiniment, la zone chauffante est courte devant la zone adiabatique aval : c'est le cas du "canal point", où le chauffage est concentré sur une longueur très courte, qui est un cas limite intéressant.

Ce cas est traité dans l'annexe VII où on montre qu'à part des solutions singulières éventuelles (situées sur une courbe dans l'espace à

cinq dimensions des paramètres restants  $g, f, u_{00}, l_0, s$ ) il n'y a ni solution oscillante, ni solution amplifiée possible quand  $l_1 \rightarrow \infty$  : l'écoulement est stable.

On peut interpréter ce fait physiquement de la manière suivante : lorsque la longueur adiabatique aval est trop longue, elle "moyenne" tous les paramètres fluctuants et les variations globales des termes de perte de pression deviennent négligeables.

La longueur de la zone adiabatique aval intervenant de manière compliquée dans les formules, on ne peut rien dire de son influence. (On verra numériquement que pour des longueurs faibles, une augmentation de cette longueur favorise l'instabilité).

Si le modèle comporte des singularités géométriques, on ne peut distinguer dans les termes retardés l'action de  $l_1$  en temps que paramètre de gravité ou de frottement que pour  $l_1$  faible (cf. annexe I). On ne peut rien dire ici sur cette action.

### 5.3.3. Sous-saturation réduite $s$

$s$  figure dans l'équation en  $c$ , directement par  $B_2$  et  $B_3$  et par l'intermédiaire de  $e^{-cs}$  (terme retardé) dans  $B_1, B_2, B_3$ .

Son action est très complexe.

Si  $s$  s'annule, il ne se produit rien de remarquable, si ce n'est, comme pour  $l_1$ , une simplification des formules (IV-5) donnant  $B_1, B_2, B_3$  et (IV-8) donnant  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ . Au lieu de cinq retards, il n'en reste que trois :  $(k+y)$ ,  $y$  et  $k$ .

Le cas où  $s$  augmente indéfiniment est sans intérêt. La condition  $u_{00} < 1/s$  impose alors en effet que  $u_{00}$  tende vers 0.

Physiquement,  $s$  est limitée, ne serait-ce que par la température de fusion du liquide, à une valeur finie.

#### 5.4. INFLUENCE DES PARAMETRES g ET f (paramètres adimensionnels de gravité et de frottement)

Ils interviennent linéairement dans l'équation en c :

$$B_1 g + B_2 f u_{00} + B_3 = 0 \quad (\text{IV-4})$$

Toutefois étant donné la complication des coefficients  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ , ceci n'apporte rien sur le plan analytique.

On vérifie que si  $g$  (ou  $f$ ) tend vers 0, il ne se passe rien. En particulier, l'équation en  $c$  comporte toujours autant de retards (cinq). Ceci confirme le résultat du chapitre II (§ 2.3.4.) sur la possibilité d'oscillations en canal horizontal ou à écoulement vers le bas ( $g = 0$  ou  $g < 0$ ). De même, les oscillations sont possibles dans un canal sans dissipation ( $f = 0$ ) qui, au contraire du précédent, ne peut être physiquement qu'un cas limite.

Si  $g$  et  $f$  sont nuls simultanément, l'équation en  $c$  se simplifie. Au lieu de cinq retards il n'en subsiste que deux ( $s+k$  et  $s$ ).

#### 5.5. INFLUENCE DU PARAMETRE ADIMENSIONNEL DE DEBIT $u_{00}$

C'est le paramètre le plus important d'après le paragraphe 5.2. ci-dessus, mais c'est lui qui intervient de la manière la plus complexe, directement par  $m$ , par  $k$  et par les termes "retardés" en  $m^{-c} = e^{-ck}$ .

$u_{00}$  ne peut être nul (il n'y a pas de régime permanent possible dans un tube chauffé sans débit), mais sa valeur numérique peut être faible (§ 5.2.2.) ; il est intéressant d'étudier le cas où  $u_{00}$  tend vers zéro.

Ce cas est étudié en annexe VIII, mais une remarque importante est liée au fait que  $u_{00}$  intervient notamment par  $k$ .

$$\text{Si } u_{00} \rightarrow 0 \quad m = 1 - s + \frac{l_1}{u_{00}} \rightarrow \infty \quad k = \text{Log } m \rightarrow \infty$$

mais  $\frac{1}{k}$  n'est pas un infiniment petit du même ordre que  $u_{00}$ .

Supposons, par exemple,  $u_{00} \approx 10^{-8}$ , il en résulte  $m \approx 10^8$ ,  $k \approx 18,4$  : bien que la vitesse réduite  $u_{00}$  soit extrêmement faible, le paramètre  $k$  n'est pas très grand. Cette remarque sera à retenir lorsqu'on étudiera numériquement des cas à  $u_{00}$  faibles : il sera dangereux d'extrapoler la forme de la surface seuil aux faibles  $u_{00}$ .

Les résultats de l'annexe VIII sont les suivants :

- Si  $u_{00}$  tend vers zéro à  $\omega$  fini, les courbes "iso  $u_{00}$ " de la surface seuil n'ont pas de limite. Elles balayent une infinité de fois un certain domaine. Ceci tiend à la présence dans les équations en  $\omega$  des lignes trigonométriques de l'angle  $\omega k$ . Les courbes "iso  $\omega$ " tracées sur la surface seuil se projettent dans ce domaine suivant des courbes infiniment voisines d'une famille d'hyperboles.
- Dans le chapitre suivant, nous serons amenés à tracer sur la surface seuil des courbes paramétrées non en  $\omega$ , mais en  $\omega (k+s+y)$ . Si  $u_{00}$  tend vers zéro à  $\omega (k+s+y)$  fini,  $\omega$  tend vers zéro et les points correspondants tendent tous vers le même point limite, situé sur l'axe des  $f$  parce qu'appartenant à la surface (S) frontière entre domaine possible et impossible au sens du chapitre III.

Ce point a pour coordonnées :

$$g = 0 \quad f = - \frac{1}{\frac{1}{2} + l_1}$$

Pour  $\omega k = 2 n \pi$ ,  $n$  entier positif, les courbes "iso  $\omega k$ " sont tangentes en ce point à la droite  $(s+l_1-1) g + (\frac{1}{2} + l_1) f + 1 = 0$ .

La limite supérieure de  $u_{00}$  est  $1/s$ . Ce cas est également étudié en annexe VIII, mais on ne peut rien dire d'intéressant.

#### 5.6. INFLUENCE DE LA PULSATION ADIMENSIONNELLE $\omega$

Nous raisonnons ici sur les équations en  $\omega$  qui peuvent être considérées :

- soit comme des équations permettant de calculer  $u_{00}$  et  $\omega$  connaissant les autres paramètres ( $g, f, l_0, l_1, s$ ). C'est le point de vue logique, physiquement parlant ;
- soit comme des équations permettant de calculer  $g$  et  $f$  connaissant les paramètres ( $u_{00}, l_0, l_1, s$ ) et  $\omega$ . C'est le point de vue logique, mathématiquement parlant, le système étant linéaire en  $g$  et  $f$ .

C'est de ce dernier point de vue que nous nous plaçons dans ce paragraphe.  $\omega$  devient le paramètre d'une famille de courbes. Nous nous efforcerons toutefois de ne pas perdre de vue sa signification physique.

Si la pulsation  $\omega$  tend vers zéro, la période des oscillations éventuelles tend vers l'infini, le système évolue très lentement.

Si la pulsation  $\omega$  tend vers l'infini, la période des oscillations éventuelles tend vers zéro. La linéarisation qui impose que les modules de la vitesse et de sa dérivée soient petits n'est plus valable. Pour des  $\omega$  relativement grands, il est cependant intéressant d'étudier le cas où il tend vers l'infini.

Ces cas sont étudiés en annexe IX.

Si  $\omega$  tend vers zéro, on retrouve comme prévu la surface (S) étudiée au chapitre III, frontière entre les domaines où le régime permanent est possible ou impossible.

Si  $\omega$  tend vers l'infini, il n'y a pas de solution oscillatoire pure : sur la surface seuil, la pulsation  $\omega$  est bornée supérieurement ; sur ce point du moins, la linéarisation est parfaitement justifiée.

Dans les équations en  $\omega$  (formules (IV-7) et (IV-8)) la pulsation intervient de deux façons :

- directement, c'est-à-dire dans des groupements polynomiaux tels que  $\omega$ ,  $(1+\omega^2)$ ,  $(4+\omega^2)$ . C'est par ces groupements que  $\omega$  se trouve borné supérieurement,

- par l'intermédiaire des lignes trigonométriques d'angles proportionnels à  $\omega$  :  $\omega (s+k+y)$ ,  $\omega (s+y)$ ,  $\omega (s+k)$ ,  $\omega s$ ,  $\omega y$ .

Par ces groupements, les formules (IV-7) ont une allure périodique en  $\omega$ .

La combinaison des deux modes d'intervention amène une "allure" périodique "amortie" des fonctions de  $\omega$  représentées par les formules (IV-7).

Faisant un raisonnement qualitatif non rigoureux, on peut alors penser que les solutions de (IV-7) auront également une "allure" périodique en  $\omega$ .

A  $(g, f, l_0, l_1, s)$  donnés, si on connaît une solution à  $\omega$  faible,  $(u_{00}, \omega)$  il est probable qu'il y aura un nombre fini d'autres solutions correspondant à  $\omega + \Delta_1, \omega + \Delta_1 + \Delta_2, \dots$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots$  étant des nombres finis. Le nombre de ces solutions sera fini puisque  $\omega$  est borné supérieurement.

Autrement dit, la surface  $(\Sigma)$ , satisfaisant aux équations en  $\omega$ , a un nombre fini de nappes à  $(g, f, l_0, l_1, s)$  donnés.

Pour résoudre le système (IV-7) des équations en  $\omega$  et tracer la surface  $(\Sigma)$ , la seule solution rationnelle est de bloquer  $(l_0, l_1, s)$  d'une part,  $u_{00}$  d'autre part, et de calculer  $g$  et  $f$  en fonction de  $\omega$  (ou de tout autre paramètre fonction de  $\omega$ ).  $s, k$  et  $y$  étant essentiellement positifs, le plus grand des angles fonction de  $\omega$  est  $\omega (s+k+y)$ .

Les valeurs successives de  $\omega$  devront être telles que  $\omega (s+k+y)$  ne varie pas trop d'un calcul au suivant, ce qui impose pratiquement une limite supérieure au "pas" sur  $\omega$ .

Pour l'étude numérique, nous serons ainsi amenés logiquement à adopter comme paramètre représentatif de la pulsation le nombre :

$$\mu = \frac{\omega (s+k+y)}{2 \pi}$$

Nous constaterons dans le chapitre suivant que ce paramètre est, de plus, physiquement très intéressant.

### 5.7. ETUDE DES CAS PARTICULIERS OU LE SYSTEME COMPORTE UN SEUL RETARD

C'est le cas où il n'y a ni "sous-saturation" à l'entrée, ni zone adiabatique aval. Il a donc une signification physique et comme il permet de pousser plus loin les calculs, nous l'étudierons en détail :

$$s = l_1 = 0 \text{ entraînent } y = 0$$

$$E_s = E_y = 1$$

L'équation en  $c$  s'écrit :

$$B_1 g + B_2 f u_{00} + B_3 = 0 \quad (\text{IV-4})$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{-m^{-c}}{c(1-c)} + \frac{1}{m(1-c)} + \frac{1}{c} \\ B_2 &= \frac{u_{00}(m^2 m^{-c} - 1)}{(1-c)(2-c)} - \frac{1}{1-c} + 2(l_0 + 1) \\ B_3 &= m u_{00} \frac{m^{-c}}{(1-c)^2} - \frac{u_{00} k c^2}{1-c} - \frac{u_{00}}{(1-c)^2} + l_0 c \end{aligned} \right\} \quad (\text{V-2})$$

où :

$$\left\{ \begin{aligned} m &= 1 + \frac{1}{u_{00}} \\ k &= \text{Log } m \end{aligned} \right.$$

Ce cas est étudié en annexe X et les résultats nouveaux de cette annexe sont les suivants :

- la valeur du paramètre de gravité  $g$  est bornée supérieurement par une fonction des autres paramètres ( $f, l_0, u_{00}$ ). Cette fonction n'est pas explicitable car elle contient  $\omega$  dont on sait seulement qu'il est également borné,

- la valeur du paramètre de gravité  $g$  est borné inférieurement par une valeur négative issue de la condition de possibilité du régime permanent (chapitre III),
- la valeur du paramètre de débit  $u_{00}$  est également bornée supérieurement par une valeur de l'ordre de 0,1 au moins pour des valeurs de  $|g|$  et  $f$  faibles. Ceci est conforme aux conclusions qualitatives tirées au paragraphe 5.2.2. ci-dessus de la signification physique de  $u_{00}$ .

#### 5.8. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence la signification physique des paramètres du modèle. Les paramètres  $u_{00}$  et  $g$  notamment se rattachent d'une façon simple à l'expansion du fluide, c'est-à-dire à l'effet de densité étudié.

De cette signification physique nous avons pu tirer des indications sur l'ordre de grandeur au seuil ou l'influence de ces paramètres.

Nous avons également mis en évidence la signification d'autres groupements intervenant dans l'équation en  $c$  et notamment des différents retards (temps de parcours des zones chauffante sans effet de densité, chauffante avec effet de densité, adiabatique aval).

Sur le plan analytique proprement dit, des études de limites nous ont montré notamment :

- que la pulsation adimensionnelle  $\omega$  au seuil est bornée supérieurement ou, ce qui revient au même, que la surface seuil possède un nombre fini de nappes,
- qu'un paramètre important dans lequel intervient cette pulsation est  $\omega (k+s+y)$ ,
- que, au moins dans certains cas, le paramètre adimensionnel de gravité  $g$  est, au seuil, compris entre deux limites, et que le signe de  $g$  n'est

pas un facteur décisif,

- que, au moins dans certains cas, le paramètre adimensionnel de débit  $u_{00}$  est borné au seuil,
- que lorsque les longueurs adimensionnelles de zones adiabatiques amont  $l_0$  ou aval  $l_1$  sont suffisamment grandes, le système est stable.

On ne peut plus espérer progresser dans la connaissance des seuils d'instabilités du modèle que par une étude numérique, objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE VI

### ETUDE NUMERIQUE

#### 6.1. INTRODUCTION

Dans l'espace des paramètres du modèle  $(g, f, u_{00}, l_0, l_1, s)$  on a montré (cf. chapitre IV) que la recherche de la surface seuil sur laquelle apparaît le phénomène d'oscillations se ramène à celle de la surface  $(\Sigma)$  définie paramétriquement par les "équations en  $\omega$ " :

$$\left. \begin{aligned} a_1 g + a_2 f u_{00} + a_3 &= 0 \\ b_1 g + b_2 f u_{00} + b_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-7})$$

Le paramètre  $\omega$  est la pulsation réduite au seuil.

Les  $a_i$  et  $b_i$  sont des fonctions compliquées de  $(u_{00}, l_0, l_1, s, \omega)$  non reproduites ici (voir formules IV-8) et le chapitre précédent nous conduit à l'étude numérique de la surface  $(\Sigma)$ .

Cette étude doit être complétée par celle de la surface  $(S)$  limitant les domaines où le fonctionnement est possible ou impossible au sens du chapitre III (régime permanent).

La méthode retenue résulte de remarques déjà faites antérieurement et notamment des suivantes :

- a) distinction entre "paramètres fondamentaux"  $(g, f, u_{00})$  et paramètres supplémentaires  $(l_0, l_1, s)$  (cf. chapitre II) ;

- b) distinction entre paramètres "de géométrie" ( $f, l_0, l_1$ ) et paramètres "de fonctionnement" ( $g, u_{00}, s$ ) (cf. chapitre I),
- c) linéarité du système (IV-7) en  $g$  et  $f$ .

Un cas donné correspondra à un ensemble de valeurs pour les trois paramètres ( $l_0, l_1, s$ ). (Pour représenter le modèle par un point dans un espace à trois dimensions, il faut bloquer trois paramètres -il est logique de bloquer  $l_0$  et  $l_1$  - représentant la géométrie, qui ne varie pas au cours d'une série d'expériences. Pour le troisième, compte tenu des remarques ci-dessus, on a le choix entre  $s$  et  $u_{00}$ . Le fait que  $s$  ne soit pas un paramètre fondamental et que, physiquement, on opère souvent à  $s$  donné, c'est-à-dire à température d'entrée constante, nous a conduits au choix ci-dessus).

Se donnant  $u_{00}$  on pourra alors, en faisant varier  $\omega$ , calculer  $g$  et  $f$  par le système (IV-7) et tracer par points la ligne de niveau  $u_{00}$  de la surface ( $\Sigma$ ) dans l'espace ( $g, f, u_{00}$ ). Nous la représenterons par sa projection dans le plan ( $g, f$ ). De la même façon, on pourra tracer sur la surface ( $\Sigma$ ) les courbes "iso  $\omega$ ". Nous les représenterons également par leurs projections dans le plan ( $g, f$ ). Pour une géométrie donnée,  $f$  est une constante. Nous aurons donc intérêt à compléter la représentation ci-dessus de la surface ( $\Sigma$ ) par celle de ses intersections par des plans  $f = \text{constante}$ . Nous appellerons ces plans ( $g, u_{00}$ ) les "plans de fonctionnement", car pour une géométrie et une "sous-saturation" à l'entrée données, le point représentatif de l'évolution du modèle se déplace dans un tel plan.

Nous représenterons de même la surface ( $S$ ) limitant les domaines de fonctionnement possible et impossible.

Connaissant un domaine de stabilité, il sera alors aisé de déterminer la surface seuil (cf. conclusion du chapitre IV).

Enfin, l'étude de plusieurs cas ( $l_0, l_1, s$ ) nous permettra de connaître l'influence de ces paramètres.

Le volume de calcul correspondant est considérable, mais ne présente aucune difficulté particulière.

## 6.2. PROGRAMMES DE CALCUL

Ils sont donnés en annexe XI, ainsi que la correspondance entre les notations du texte et les notations du programme FORTRAN, tel qu'il est passé sur la I 30 S du Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble.

### 6.2.1. Programme pour le tracé de la surface ( $\Sigma$ )

On introduit  $l_0$  en se réservant la possibilité de donner une valeur à ( $l_0$  frottement) et une valeur différente à ( $l_0$  inertie) pour le cas où la zone adiabatique amont comporterait des singularités (voir annexe I et § 5.2.5 ci-dessus, où il a été notamment montré qu'il n'est pas nécessaire d'introduire la valeur de  $l_0$  gravité).

On introduit  $l_1$  en se réservant, pour les mêmes raisons, la possibilité de lui donner trois valeurs distinctes : ( $l_1$  gravité), ( $l_1$  frottement), ( $l_1$  inertie) (voir annexe I et § 5.2.6).

On introduit  $s$ .

Cet ensemble ( $l_0, l_1, s$ ) définit un cas.

On introduit ensuite la première valeur de  $u_{00}$  prise dans la liste des valeurs qu'on désire étudier. Il reste à calculer, pour chaque  $\omega$ , la valeur de  $g$  et  $f$ .

La présence de lignes trigonométriques dans les équations (IV-8) impose, ainsi qu'il a été vu au paragraphe 5.6, que d'un calcul au suivant le plus grand des angles contenant  $\omega$  varie peu.

Cet angle  $\omega$  ( $s+k+y$ ) prend lui-même, comme  $l_1$ , trois valeurs distinctes, suivant que le terme considéré est un terme de gravité, de frottement ou d'inertie.

On a donc choisi d'imposer pour le calcul un "pas" assez faible à la quantité  $\mu_{\max}$  qui est la plus grande des trois valeurs de :

$$\mu = \frac{\omega (s + k + y)}{2\pi}$$

Ce procédé s'est avéré le meilleur.

On introduit finalement la première valeur de  $\mu_{\max}$  prise dans la liste des valeurs qu'on désire étudier.

La machine calcule  $\omega$ , les coefficients et les racines en  $g$  et  $f$  des équations (IV-7) ci-dessus.

Elle passe ensuite à la valeur suivante de  $\mu_{\max}$ , puis quand la liste des valeurs  $\mu_{\max}$  est épuisée, à la valeur suivante de  $u_{00}$  et ainsi de suite jusqu'à épuisement de la liste des valeurs de  $u_{00}$ .

#### 6.2.2. Programme pour le tracé de la surface réglée (S)

On introduit ( $l_0$  frottement), seule des valeurs de  $l_0$  à intervenir dans le programme.

On introduit ( $l_1$  gravité) et ( $l_1$  frottement), seules des valeurs de  $l_1$  à intervenir dans ce programme.

On introduit  $s$ .

On introduit enfin la première valeur de  $u_{00}$  prise dans la liste des valeurs qu'on désire étudier.

La machine calcule les coefficients et trois points de la droite génératrice de la surface étudiée (choisis pour qu'au moins deux soient en général dans les limites de l'épure). Elle passe ensuite à la valeur suivante de  $u_{00}$ .

### 6.3. GAMME DE PARAMETRES COUVERTE

Dans le choix des ordres de grandeurs des paramètres, nous serons guidés par les valeurs qu'ils prennent pour des installations existantes et notamment celle ayant servi à l'étude expérimentale [1].

#### 6.3.1. Paramètres supplémentaires

On ne peut dans cette étude envisager d'étudier le nombre de cas nécessaire à une connaissance précise de l'influence de ces paramètres. Compte tenu de la possibilité de distinguer les valeurs relatives à des termes de gravité, de frottement et d'inertie, l'ensemble ( $l_0$ ,  $l_1$ ,  $s$ ) représente en fait six paramètres indépendants. Attribuer, pour une étude systématique, trois valeurs (ce qui est un minimum) à chacun de ces paramètres conduit à  $3^6 = 729$  cas.

Pour réduire ce nombre :

- a) Nous ne distinguerons pas les trois influences de la longueur de zone adiabatique aval : d'une part les calculs correspondants ne sont valables que pour une pulsation faible (nous verrons ci-dessous ce que signifie, dans les cas pratiques, cette condition), d'autre part on s'efforce dans la pratique de limiter les singularités dans cette zone.:

Ceci ramène le nombre de paramètres supplémentaires de six à quatre. Un nombre de  $3^4 = 81$  cas étant encore prohibitif.

- b) Nous ne ferons pas varier ces quatre paramètres indépendamment les uns des autres. Nous définirons un cas de référence et nous ferons varier les paramètres autour de ce cas de référence. Nous ne connaissons ainsi, en toute rigueur, l'influence des paramètres qu'autour du cas de référence, mais nous pourrions nous contenter d'une dizaine de cas.

Dans les cas pratiques, la longueur de zone adiabatique amont est faible : dans les réacteurs nucléaires elle est souvent presque nulle (sauf

présence d'un diaphragme à l'entrée des canaux). Dans les installations d'essais une telle zone est inévitable (mesure de débit, vannes de réglage, etc...), mais on s'efforce de réduire sa longueur et, sauf cas particuliers, la valeur de  $l_0$  dépasse rarement l'unité. Pour l'étude expérimentale [1] :

- la longueur  $l_0$  frottement a varié de 0,8 à 11,6 (le paramètre freinage à l'entrée ayant donné lieu à une étude systématique),
- la longueur  $l_0$  inertie a varié de 0,625 à 0,69.

Sur une installation très différente, également existante au Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble (Boucle "Caline") :

- $l_0$  frottement peut être pratiquement nul ( $< 0,1$ ),
- $l_0$  inertie varie de 0,1 à 0,5.

La longueur de zone adiabatique aval  $l_1$  peut être elle aussi, soit pratiquement nulle, soit de l'ordre de l'unité. Dans l'étude expérimentale [1],  $l_1$  a pris deux valeurs voisines de 0,2 et de 2.

La valeur de la sous-saturation réduite  $s$  peut varier beaucoup. En effet, d'après l'annexe XII où on recherche les valeurs qu'il faut donner à la masse spécifique  $R_0$  et à l'enthalpie caractéristique  $H_c$  du fluide fictif pour comparer le modèle à l'étude expérimentale [1], une sous-saturation réduite  $s = 1$  correspond, pour une pression de  $8 \text{ kgf/cm}^2$ , à une sous-saturation réelle  $H_0 = H_c \approx 4,92 \text{ kcal/kg}$ , soit environ  $4,7^\circ\text{C}$ . Une valeur  $s = 10$  n'a donc rien d'exceptionnel ici. Elle correspondrait à une sous-saturation réelle de  $H_0 = 10 H_c = 49,2 \text{ kcal/kg}$ , soit environ  $47,8^\circ\text{C}$ . Il est vrai que le phénomène dit d'ébullition locale, qui fait apparaître l'"effet de densité" avant que l'enthalpie n'atteigne l'enthalpie de saturation, provoque une réduction sensible de la valeur du paramètre  $s$  par rapport à sa valeur théorique  $H_0/H_c$ . La prise en compte de ce phénomène est étudié en annexe XIII.

Enfin,  $H_c$  augmentant notablement avec la pression (cf. annexe XII), les valeurs réalistes de  $s$  sont beaucoup plus petites à haute pression

(environ 6 fois plus faibles que ci-dessus pour une pression de 80 kgf/cm<sup>2</sup>). Compte tenu de ces renseignements et des résultats de calculs préliminaires, nous avons fixé ainsi la liste des cas étudiés :

a) Cas destinés à l'étude de l'influence de la longueur  $l_1$  de zone adiabatique aval.

Ce sont les cas suivants :

- ①  $l_0 = 0, l_1 = 0, s = 0$  (cas le plus simple possible où tous les paramètres supplémentaires sont nuls)
- ②  $l_0 = 0, l_1 = 1, s = 0$  (la longueur de la zone adiabatique aval est égale à la longueur chauffante)
- ③  $l_0 = 0, l_1 = 2, s = 0$  (la longueur de la zone adiabatique aval est égale au double de la longueur chauffante)

C'est le cas ② qui nous servira par la suite de cas "de référence" : il est plus réaliste que le cas ① et encore très simple.

b) Cas destinés à l'étude de l'influence de la longueur  $l_0$  de zone adiabatique amont :

- ④  $l_0 = 1, l_1 = 1, s = 0$  (ce cas est destiné à tester l'influence "globale" du paramètre  $l_0$ )
- ⑤  $\begin{matrix} l_{of} = 1 \\ l_{oi} = 0 \end{matrix} l_1 = 1, s = 0$  (cas destiné à l'étude de l'influence du paramètre  $l_0$  en tant que paramètre de frottement)
- ⑥  $\begin{matrix} l_{of} = 0 \\ l_{oi} = 1 \end{matrix} l_1 = 1, s = 0$  (cas destiné à l'étude de l'influence du paramètre  $l_0$  en tant que paramètre d'inertie).

c) Cas destinés à l'étude de l'influence de la "sous-saturation"  $s$ .

La gamme à couvrir pour  $s$  est plus grande que pour  $l_0$  et  $l_1$ . De plus,  $s$  est un paramètre très sensible.

$$\textcircled{7} \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 1, \quad s = 0,5$$

$$\textcircled{8} \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 1, \quad s = 1$$

$$\textcircled{9} \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 1, \quad s = 3$$

$$\textcircled{10} \quad l_0 = 0, \quad l_1 = 1, \quad s = 10$$

### 6.3.2. Paramètre de débit $u_{00}$

$$\text{Par définition } u_{00} = \frac{U_{00} \Theta_c}{L_c} .$$

$$\text{Déterminons tout d'abord un ordre de grandeur de } \Theta_c = \frac{H_c R_0}{L_c} .$$

Dans l'étude expérimentale [1], les puissances volumiques observées au seuil d'instabilité vont de 50 à 200 W/cm<sup>3</sup> soit :

$$50 \cdot 10^6 < W < 200 \cdot 10^6 \quad (\text{M K S})$$

D'après l'annexe XII  $H_c R_0 \approx 1,85 \cdot 10^7$  (MKS). Il en résulte que  $0,09 < \Theta_c < 0,37$  seconde.

L'ordre de grandeur de  $\Theta_c$  est le cinquième de seconde.

$U_{00}$  étant de l'ordre du m/s et  $L_c$  de l'ordre du mètre, l'ordre de grandeur de  $u_{00}$  est 0,2.

Compte tenu également des remarques du chapitre précédent (§ 5.5. et 5.7.) et des calculs préliminaires, nous avons été amenés à établir pour  $u_{00}$  la liste type donnée en annexe XI :

$$10^{-8} \leq u_{00} \leq 1$$

avec bien entendu la condition  $u_{00} < \frac{1}{s}$  (III-2)

### 6.3.3. Pulsation réduite $\omega$

On l'introduit dans le programme de calcul, pour le tracé de la surface ( $\Sigma$ ), immédiatement après  $u_{00}$  sous la forme :

$$\mu = \frac{\omega (k+s+y)}{2\pi}$$

$\mu$  est le produit de la fréquence  $\frac{\omega}{2\pi}$  par le temps de parcours  $(s+k+y)$  de l'ensemble zone chauffante - zone adiabatique aval. La période et ce temps de parcours sont grossièrement de même ordre, dans les études expérimentales telles que [1].  $\mu$  sera donc, grossièrement, de l'ordre de l'unité.

Ceci nous a conduit, après quelques calculs préliminaires, à adopter pour  $\mu$  la liste type donnée en annexe XI.

### 6.3.4. Paramètres de gravité et de frottement $g$ et $f$

Le calcul nous donne pour les surfaces ( $\Sigma$ ) et ( $S$ ), des valeurs de  $g$  et  $f$  comprises entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Pour la représentation graphique, il nous faut adopter un intervalle restreint.

Par définition :

$$g = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2}{L_c} \quad f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D}$$

$G$  étant de l'ordre de  $10 \text{ m/s}^2$ ,  $\varphi$  étant le plus souvent égal à  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\Theta_c$  étant de l'ordre de  $0,2 \text{ s}$  et  $L_c$  de l'ordre du mètre,  $g$  est de l'ordre de  $0,4$  mais peut varier beaucoup autour de cette valeur.

$\Lambda$  varie peu autour de  $0,02$ ,  $\frac{L_c}{D}$  est de l'ordre de  $100$ ,  $f$  est de l'ordre de  $1$  mais peut varier beaucoup autour de cette valeur. Par ailleurs,  $f < 0$  n'a pas de sens physique.

Nous avons pensé être larges en adoptant comme limites pour la représentation de la surface seuil :

$$- 5 \leq g \leq 7,5$$

$$0 \leq f \leq 7,5$$

Les résultats ont confirmé la validité de cette représentation.

### 6.3.5. Evolutions dans le "plan de fonctionnement" (g, u<sub>oo</sub>)

Lorsque la géométrie, la pression et la "sous-saturation" à l'entrée étant fixées, on évolue dans un plan de fonctionnement, on ne fait fréquemment varier que l'un des deux paramètres de fonctionnement restants (puissance et débit).

#### a) Evolution à puissance constante (débit variable).

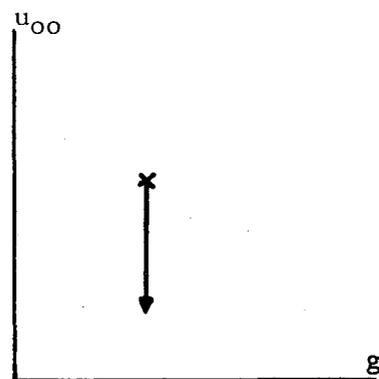
Par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{oo} = \frac{U_{oo} H_c R_o}{W L_c} \\ g = \frac{G \sin \varphi (H_c R_o)^2}{W^2 L_c} \end{array} \right.$$

Dans ce type d'évolution g est constant et u<sub>oo</sub> varie proportionnellement au débit.

En général, partant d'un point stable, on diminue le débit. On parcourt alors dans le plan de fonctionnement une parallèle à l'axe des u<sub>oo</sub>.

Dans les études expérimentales, et notamment [1], on fixe, en général, non pas le débit mais la valeur de la différence de pression entre bornes du canal. On a vu (§ 2.3.1 et chapitre III) quelle était la relation entre ces deux paramètres. Si, en diminuant Δp à partir d'un point stable, on rencontre d'abord la surface (S), le fonctionnement devient impossible. Le débit chute jusqu'à traverser éventuellement une seconde fois la



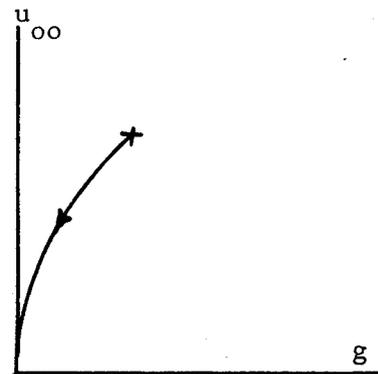
surface (S). Il y a discontinuité du débit (dans les études expérimentales, on emploie généralement, du fait de la présence de plusieurs canaux en parallèle, le terme de redistribution de débit).

b) Evolution à débit constant (puissance variable)

D'après les formules ci-dessus, le paramètre  $u_{00}$  évolue comme  $\frac{1}{W}$  et le paramètre  $g$  comme  $\frac{1}{W^2}$ .

Le point représentatif parcourt alors dans le plan de fonctionnement une parabole d'axe, l'axe des  $g$  et de sommet l'origine, d'équation :

$$g = \frac{G \sin \varphi L_c}{U_{00}^2} u_{00}^2 \quad (\text{VI-1})$$



En général, partant d'un point stable, on augmente la puissance. Dans la pratique, cette évolution est la plus courante et dans la région physiquement intéressante la parabole s'éloigne peu de l'axe vertical (axe des  $u_{00}$ ). Calculons en effet l'ordre de grandeur du coefficient de  $u_{00}^2$  dans l'expression (VI-1).

Dans l'étude expérimentale [1]  $L_c$  était 1,2 m et  $U_{00}$  a varié de 0,2 à 2,5 m/s environ.

On aura donc comme coefficient minimum :

$$\frac{G \sin \varphi L_c}{U_{00}^2} \approx \frac{9,81 \cdot 1,2}{(2,5)^2} \approx 1,9$$

L'ordre de grandeur correspondant est pour :

$$u_{00} = \frac{U_{00} \varphi_c}{L_c} \approx \frac{2,5 \cdot 0,2}{1,2} \approx 0,42$$

et pour  $g \approx 1,9$   $u_{00}^2 \approx 0,33$ .

Le coefficient maximum sera de l'ordre de :

$$\frac{G \sin \varphi L_c}{U_{00}^2} = \frac{9,81 \cdot 1,2}{(0,2)^2} \simeq 300$$

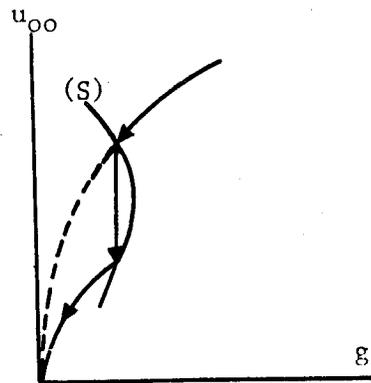
mais cette grande valeur est automatiquement associée à une faible valeur de  $u_{00}$ . Même en supposant une valeur de  $\Theta_c$  assez grande (0,3 s par exemple, cf. § 6.3.2.) :

$$u_{00} = \frac{U_{00} \Theta_c}{L_c} \simeq \frac{0,2 \cdot 0,3}{1,2} \simeq 0,05$$

et  $g \simeq 300 \quad u_{00}^2 \simeq 0,75$ .

Dans les études expérimentales où le paramètre fixant le débit est la différence de pression entre les bornes du canal (cf. § a ci-dessus) l'augmentation de la puissance entraîne une variation de débit. Cette variation est faible tant qu'on est éloigné de la surface (S) mais, si la parabole ci-dessus rencontre d'abord la surface (S), le fonctionnement devient impossible. Il y a discontinuité du débit et l'évolution se traduit dans le plan de fonctionnement par deux branches de paraboles reliées par une parallèle à l'axe des  $u_{00}$ .

Notons que dans le cas particulier d'un écoulement horizontal,  $g$  est nul et les deux types d'évolution a) et b) ci-dessus sont équivalents.



#### 6.4. RESULTATS

La surface seuil est représentée, dans les cas énumérés ci-dessus, sur les figures jointes (fig. 4 à 36).

Nous avons admis, conformément à la réalité physique, que le domaine stable comprend les forts  $u_{00}$  (à  $f$  et  $g$  donnés) (Ceci a été montré

au chapitre V dans le cas particulier où  $l_1 = s = 0$  : pas de zone adiabatique aval - pas de "sous-saturation" à l'entrée).

#### 6.4.1. Résultats généraux

- La surface (S) a toujours une forme assez simple conformément aux résultats du chapitre III. Elle est représentée en traits mixtes dans les projections sur le plan (g, f). Elle pénètre rarement dans le domaine  $g > 0$ .

- La surface ( $\Sigma$ ) sur laquelle le système (IV-7) est vérifié comporte, comme prévu au chapitre précédent (§ 5.3.6.) plusieurs nappes ; c'est-à-dire que, pour g et f donnés, plusieurs couples de valeurs ( $u_{00}$ ,  $\mu$ ) satisfont le système (IV-7).

La première nappe correspond à la plus forte valeur de  $u_{00}$  (c'est la première rencontrée lorsque le système évolue, à  $u_{00}$  décroissant, tous les autres paramètres étant bloqués).

Il est alors remarquable de constater que dans tous les cas étudiés le paramètre  $\mu$  varie autour de 1 sur la première nappe, autour de 2 sur la seconde et ainsi de suite et que, d'une nappe à la suivante, pour g et f donnés, le paramètre  $\mu$  varie presque exactement d'une unité (sauf pour la région de la première nappe où  $\mu$  est voisin de 0). Les nappes successives ont des allures voisines.

On peut notamment le vérifier en comparant les figures 4, 6 et 8 d'une part, 5, 7 et 9 d'autre part, sur lesquelles nous avons tracé pour le cas (1) les trois premières nappes (fig. 4, 6, 8) et les trois réseaux constitués par les projections sur le plan (f, g) des courbes "iso  $\mu$ " correspondant à ces trois nappes (fig. 5, 7 et 9).

Dans les autres cas, nous avons limité le tracé complet à la première nappe. Les autres nappes ne sont représentées que lorsqu'elles sont utiles pour la détermination de la surface seuil.

Le paramètre  $\mu$ , retenu pour des raisons numériques, prend ainsi une signification physique importante.

- Sur une nappe donnée et dans la partie centrale de la région représentée (par exemple pour  $f > 1$  et  $0 < g < 5$ ) le paramètre  $\mu$  varie peu.

- Dans la région des faibles valeurs de  $f$  (variable selon les cas, mais de l'ordre de l'unité) les différentes nappes de la surface ( $\Sigma$ ) peuvent se replier sur elles-mêmes. Nous verrons ci-dessous la signification physique de ce fait.

- Les différentes nappes se raccordent entre elles, le plus souvent dans la région sans signification physique où le paramètre de frottement  $f$  est négatif.

- Lorsque le paramètre  $f$  croît la surface seuil s'aplatit (c'est-à-dire que  $u_{\infty}$  dépend de moins en moins de  $g$ ).

- Lorsque le paramètre  $\mu$  augmente pour  $u_{\infty}$  donnée,  $g$  finit par dépasser toute valeur fixée à l'avance et  $|f|$  reste faible; il n'y a qu'un nombre fini de nappes à distance finie.

Nous avons poussé les calculs jusqu'à la quatrième nappe. Elle correspond, dans les limites de l'épure, à des valeurs de  $u_{\infty}$  très faibles.

- L'allure de la ligne de niveau  $u_{\infty}$  de la  $n^{\text{ième}}$  nappe évolue avec  $u_{\infty}$  et avec  $n$  et est étudiée dans l'annexe XIV.

- La surface seuil déterminée comme indiqué dans la conclusion du chapitre IV et complétée par la surface ( $S$ ) est représentée par ses intersections avec les plans de fonctionnement  $f = \text{constante}$ . On a représenté ces intersections pour  $f = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  (se reporter aux figures 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 36).

Pour pouvoir représenter des valeurs du paramètre de débit  $u_{\infty}$  très faibles on a adopté dans cette représentation une échelle décimale en

$u_{00}$  pour  $u_{00} \geq 0,01$  et une échelle logarithmique pour  $u_{00} \leq 0,01$ . Dans ce dernier domaine, les courbes sont tracées en traits mixtes.

Pour  $u_{00} \geq 0,01$  les courbes sont représentées en supposant la surface vue de l'infini depuis des  $f$  négatifs, les régions instables étant opaques.

On constate que, dans certains cas, du fait que les nappes sont repliées sur elles-mêmes lorsque  $f$  est faible, des morceaux des nappes successives font partie de la surface seuil.

- Dans une évolution à puissance constante (§ 6.3.5 ci-dessus) on diminue le débit en parcourant dans le plan de fonctionnement une parallèle à l'axe des  $u_{00}$ . On constate alors que dans certains cas on peut traverser plusieurs fois la surface seuil (cf. fig. 10, 13, 16, 34 et 36).

Ceci est très important, car signifie qu'étant en fonctionnement oscillant on peut redevenir stable, dans certains cas, en diminuant le débit. Ce processus a effectivement été suivi, au cours de l'étude expérimentale [1].

- Dans une évolution à débit constant (§ 6.3.5 ci-dessus) lorsqu'on augmente la puissance le point représentatif parcourt dans le plan de fonctionnement une parabole se dirigeant vers l'origine. Les figures 10, 13, 16, 19 etc... montrent qu'en général dans ce type d'évolution on traverse la surface seuil une seule fois (et sur la première nappe en pratique) sauf pour de grandes valeurs du paramètre  $s$ .

#### 6.4.2. Résultats particuliers

Rappelons d'abord ce que nous entendons par action stabilisatrice : Nous dirons qu'un paramètre a une action "stabilisatrice" si, tous les autres restant constants, une augmentation de sa valeur fait passer de la surface seuil à un domaine de stabilité (c'est-à-dire, en général, si cette augmentation entraîne une diminution de la valeur au seuil du paramètre  $u_{00}$ ).

Dans cette définition, nous ne nous préoccupons que du premier seuil rencontré sur la surface ( $\Sigma$ ) au cours des évolutions décrites ci-dessus (§ 6.3.5).

Nous détaillerons chaque cas :

- Cas (1) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 0$   
"sous-saturation"  $s = 0$ )

Dans les cas courants (valeurs du paramètre de frottement  $f \geq 1$ ), le seuil du phénomène d'oscillation apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  de l'ordre de 0,1 et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu = \frac{\omega(k+s+y)}{2\pi}$  voisines de 0,9.

Tant que  $f$  est inférieur à une valeur de l'ordre de 2 on peut, dans une évolution à puissance constante, avec des  $g$  de l'ordre de 2,5, traverser plusieurs fois la surface seuil : on peut donc retrouver, dans ce type d'évolution, la stabilité après un domaine instable.

- Cas (2) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 0$ )  
Cas de référence.

Dans les cas courants, le seuil du phénomène apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  de l'ordre de 0,15 et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu$  voisines de 0,9. Les nappes autres que la première n'apparaissent dans les limites de l'épure que pour des valeurs de  $f$  très faibles.

Les surfaces seuils correspondant aux cas (1) et (2) se coupent mais, en général, celle du cas (2) est au-dessus.

Cela signifie que le passage du cas (1) au cas (2) diminue la stabilité toutes choses restant égales par ailleurs.

- Cas (3) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 2$   
"sous-saturation"  $s = 0$ )

Dans les cas courants, le seuil du phénomène apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  de l'ordre 0,16 et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu$  voisines de 0,95. Comme pour le cas (2) les nappes autres que la première n'apparaissent dans les limites de l'épure que pour des valeurs de  $f$  très faibles.

En général, la surface seuil est au-dessus de celle correspondant au cas (2).

{ Le passage du cas (2) au cas (3) diminue la stabilité.

- Cas (4) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 1$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 0$ )

Dans les cas courants, le seuil du phénomène apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  variant de 0,10 à 0,15 environ et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu$  voisines de 0,80.

Les nappes autres que la première ne font pas partie de la surface seuil dans les limites de l'épure.

On constate, sur la représentation en  $(g, f)$  que la surface seuil qui avait relativement peu évolué du cas (1) au cas (3) (elle s'était légèrement déplacée vers les  $u_{00}$  et les  $g$  plus grands, tous en s'aplatissant), s'est ici considérablement dilatée suivant une direction voisine de la bissectrice du premier quadrant, les valeurs du paramètre  $u_{00}$  au seuil restant du même ordre. La surface seuil qui est au-dessous de celle correspondant au cas (2) pour de faibles valeurs de  $g$  passe au-dessus pour les fortes valeurs de  $g$ .

La valeur du paramètre  $\mu$  au seuil a légèrement diminué. Notons que la valeur du paramètre  $l_0$  différenciant le cas (4) du cas (2) n'entre pas dans la formule de définition de  $\mu$  :

$$\mu = \frac{\omega (k + s + \gamma)}{2\pi}$$

L'adjonction d'une longueur adiabatique amont a deux effets qui paraissent assez logiques si on considère qu'on augmente l'inertie et l'amortissement du système : on diminue la sensibilité aux variations des paramètres  $f$  et  $g$  et on diminue la pulsation, donc la fréquence.

- Cas (5) (longueur adiabatique amont "de frottement"  $l_{of} = 1$   
longueur adiabatique amont "d'inertie"  $l_{oi} = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 0$ )

Dans les cas courants, le seuil du phénomène apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  de l'ordre de 0,11 et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu$  voisines de 0,9. Les nappes autres que la première ne font pas partie de la surface seuil dans les limites de l'épure (sauf pour  $f$  très faible  $< 0,3$ ).

On constate :

- que pour  $f = 0$  on retrouve les valeurs du cas (2), ce qui est évident physiquement (en l'absence de frottement, une longueur de friction supplémentaire n'a aucun rôle). En conséquence, nous n'avons pas jugé utile de reproduire, dans le "plan de fonctionnement"  $f = 0$ , les nappes de la surface seuil autres que la première.
- que la surface seuil est entièrement incluse dans la surface seuil du cas (2), ce qui signifie que la stabilité est augmentée, toutes choses restant égales par ailleurs,
- que les valeurs du paramètre  $\mu$  au seuil diffèrent très peu de celle du cas (2).

- Cas (6) (longueur adiabatique amont "de frottement"  $l_{of} = 0$   
longueur adiabatique amont "d'inertie"  $l_{oi} = 1$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 0$ )

Dans les cas courants, le seuil du phénomène apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  variant de 0,12 à 0,20 environ et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu$  voisines de 0,80.

Les nappes autres que la première ne font pas partie de la surface seuil dans les limites de l'épure.

On constate :

- que, comme dans le cas (4), la surface seuil coupe celle du cas (2).  
{ Elle est entièrement au-dessus de celle du cas (4) ce qui confirme  
{ l'effet stabilisateur du paramètre  $l_{of}$ .
- que les valeurs du paramètre  $\mu$  au seuil diffèrent peu de celles du cas (4).
- Cas (7) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 0,5$ )

Dans les cas courants, le seuil du phénomène apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  variant de 0,30 à 0,40 environ et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu$  voisines de 0,85.

Les valeurs de  $u_{00}$  sont donc beaucoup plus fortes que dans les cas précédents et notamment que dans le cas de référence (2) où  $u_{00} \simeq 0,15$  (la surface seuil est ici entièrement au-dessus de celle du cas (2)).

{ Ceci traduit l'influence considérable du paramètre de sous-saturation  
{  $s$ , influence ici déstabilisatrice.

La forme de la surface seuil est comme dans le cas (4) aplatie et dilatée vers les fortes valeurs de  $g$ . Dans la représentation de la surface seuil par ses intersections avec les plans de fonctionnement  $(g, u_{00})$  cette évolution nous a amenés à réduire l'échelle. Au lieu de représenter la région  $0 < u_{00} < 0,3$  il a fallu en effet représenter la région  $0 < u_{00} < 1$ .

Les nappes autres que la première ne font pas partie de la surface seuil dans les limites de l'épure.

Malgré l'influence considérable du paramètre  $s$  on constate que les valeurs du paramètre  $\mu$  au seuil sont peu différentes de celles du cas (2).

- Cas (8) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 1$ )

Dans les cas courants, le seuil du phénomène apparaît pour des valeurs de  $u_{00}$  variant de 0,35 à 0,50 environ et correspond à des valeurs du paramètre  $\mu$  voisines de 0,70.

Les échelles sont les mêmes que pour le cas (7).

Les tendances du cas (7) sont confirmées, la surface seuil du cas (8) étant toute entière (dans les limites de l'épure tout au moins) au-dessus de celle du cas (7).

Les nappes autres que la première ne font pas partie de la surface seuil dans les limites de l'épure.

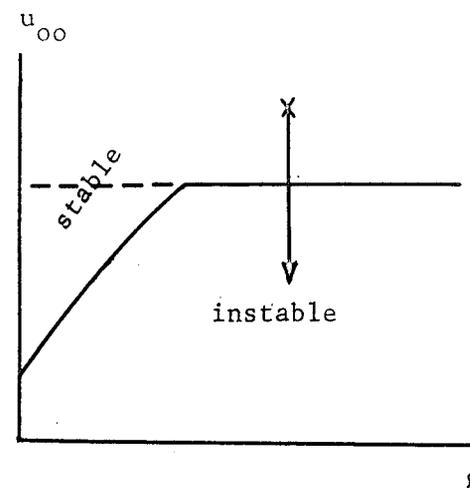
Deux remarques sont à faire :

- Dans ce cas, la surface seuil n'a de signification physique que tant que sa cote  $u_{00}$  reste inférieure à l'unité (condition  $u_{00} s < 1$  établie au chapitre III, formule III-2. Si  $u_{00} > 1/s$ , l'effet de densité ne se manifeste pas et le fonctionnement est stable). Pour des valeurs de  $f$  suffisamment faibles, le paramètre  $u_{00}$  atteint cette valeur sur la

surface seuil dans les limites de l'épure. Cela signifie que dans certains cas (f faible, g grand) le système est instable dès que l'effet de densité commence à se manifester, la surface seuil étant dans ces cas le plan  $u_{00} = 1/s$ . Dans l'analogie physique, l'instabilité apparaît en même temps que l'ébullition. Cela a été constaté physiquement dans de nombreux cas, au cours de l'étude expérimentale [1].

Dès que l'ébullition (locale en l'occurrence) apparaissait à la sortie du canal chauffant, le débit commençait à osciller.

Lorsque la surface seuil est confondue avec le plan  $u_{00} = 1/s$ , le modèle ne permet pas le calcul de la valeur du paramètre  $\mu$  au seuil.



- Le paramètre  $\mu = \frac{\omega(k+s+y)}{2\pi}$  sur la portion de la surface au seuil sur laquelle il est connu décroît lorsque  $s$  croît, ainsi qu'on peut le constater en comparant les cas (2), (7), et (8) (figures 12, 27, 30), mais relativement peu, eu égard à l'influence importante de  $s$ .

Ceci confirme l'importance physique du paramètre  $\mu$ .

- Cas (9) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 3$ )

Dans un domaine important, et comme on pouvait le prévoir d'après les résultats des cas (7) et (8), la surface seuil est confondue avec le plan  $u_{00} = 1/s$ ;  $u_{00}$  est ainsi de l'ordre de 0,33

La surface seuil ne fait partie de la surface ( $\Sigma$ ) (première nappe) que pour les très faibles valeurs de  $g$ , ce qui nous a amenés à dilater l'échelle des  $g$  (elle est décuplée).

A part l'effet "d'écrasement" de la surface seuil par diminution de la valeur limite  $1/s$  de  $u_{00}$ , la comparaison des cas (2), (7), (8), et (9) montre que l'influence de  $s$  sur la cote moyenne de la surface seuil est de moins en moins forte quand  $s$  croît. Pour de très faibles valeurs de  $g$ , l'influence de  $s$ , qui était déstabilisatrice pour  $s$  faible, peut même changer de sens.

Les nappes autres que la première ne font pas partie de la surface seuil dans les limites de l'épure. (Il n'est pas impossible qu'un domaine de stabilité existe, limité par des nappes d'ordre supérieur à 1, pour des valeurs de  $u_{00}$  inférieures à 0,15, de  $f$  inférieures à 0,5, de  $g$  de l'ordre de 7. Nous ne nous sommes pas préoccupés de ce domaine, correspondant à des valeurs non réalistes des paramètres et dont l'étude nécessiterait le tracé des nappes au-delà de la quatrième). Dans une évolution à puissance constante (ou même à débit constant), il est possible de traverser plusieurs fois la surface seuil : on peut, comme dans le cas (1), retrouver avec ce type d'évolution la stabilité après un domaine instable.

Dans la région où le paramètre  $\mu$  est connu (faibles valeurs de  $g$ ), il décroît de façon importante lorsqu'on passe du cas (8) ( $\mu \approx 0,6$  à  $0,65$ ) au cas (9) ( $\mu \approx 0,25$ ).

On peut tenter l'explication suivante : lorsque  $s$  est grand, le groupement  $(s+k+y)$  est grand et, à une faible variation de  $\omega$ , correspond une forte variation du paramètre  $\mu$ , qui devient ainsi très sensible.  $s$  intervenant également dans d'autres groupements ( $s+y$ ,  $s+k$ , et  $s$ ) on conçoit que la signification physique de  $\mu$  s'estompe (il en est de même vraisemblablement si  $l_1$ , donc  $y$ , devient très grand, cas qui n'a pas été étudié. Il en serait de même si  $k$  pouvait devenir très grand, ce qui correspond à des valeurs non réalistes de  $u_{00}$ ).

Dans la représentation de la surface seuil, par ses intersections avec les plans de fonctionnement  $(g, u_{00})$ , nous avons été amenés à modifier

l'échelle pour la clarté de la représentation. Les valeurs de  $u_{00}$  intéressantes sont en effet telles que  $0,23 < u_{00} < 0,33$ .

- Cas (10) (longueur adiabatique amont  $l_0 = 0$   
longueur adiabatique aval  $l_1 = 1$   
"sous-saturation"  $s = 10$ )

{ Comme dans le cas précédent, la surface seuil est confondue dans un  
{ domaine important avec le plan  $u_{00} = 1/s (= 0,1 \text{ ici})$ .

Cependant, il subsiste, contrairement à ce qu'on aurait pu attendre par analogie avec les cas précédents (8) et (9), des portions de la surface ( $\Sigma$ ) faisant partie de la surface seuil.

Ce sont d'ailleurs des nappes d'ordre supérieur à 1 qui jouent ce rôle, et on peut penser que le domaine de stabilité ainsi délimité provient, lorsqu'on passe du cas (9) au cas (10), du domaine signalé au cours de l'étude du cas (9) (mais non étudié, car dans une région non réaliste). Ceci confirme l'évolution annoncée au cas (9) concernant le sens physique de  $\mu$ . Si  $\mu$  perd une partie de sa signification, il en est en effet de même de la notion de nappe correspondant à des valeurs entières de  $\mu$ . Les nappes successives deviennent de plus en plus imbriquées et il faudrait pousser les calculs au-delà de la sixième nappe pour être sûr de la représentation de la surface seuil du cas (10) dans le domaine  $g \leq 7,5$ .

Compte tenu des résultats des autres cas et de l'ordre de grandeur usuel du paramètre  $g$ , nous avons donc été amenés à modifier le domaine (et l'échelle) de la représentation et nous nous sommes limités à :

$$0 \leq f \leq 7,5 \text{ (sans changement)}$$

$0 \leq g \leq 2,5$  (au lieu de  $-5 \leq g \leq 7,5$  - la partie  $g$  négatif ou égal à zéro fait en effet toujours partie du domaine impossible dans la gamme intéressante des valeurs des paramètres  $u_{00}$  et  $f$ ).

Dans ce domaine, les nappes susceptibles de faire partie de la surface seuil sont :

- . la seconde ( $u_{00}$  de l'ordre de 0,09,  $\mu$  de l'ordre de 1,7)
- . la troisième ( $u_{00}$  de l'ordre de 0,099,  $\mu$  de l'ordre de 2,4)
- . la quatrième ( $u_{00}$  de l'ordre de 0,095,  $\mu$  de l'ordre de 3,6)

Les échelles de la représentation sont différentes de celles des autres cas.

La figure 35 représente les nappes ci-dessus avec la représentation en traits mixtes des projections des courbes iso  $\mu$ . Sur la représentation de la seconde nappe, figure également celle des génératrices de la surface (S). La figure 36 représente la surface seuil (projection dans le plan de fonctionnement) avec une échelle des  $u_{00}$  très dilatée, car :

$$0,07 \leq u_{00} < 0,10$$

(la courbe correspondant à  $f = 4$  n'est pas représentée entièrement pour des raisons de clarté. Elle est très voisine des courbes correspondant aux valeurs  $f = 3$  et  $f = 5$ ). Ici encore, on peut, pour certains types d'évolution, retrouver la stabilité après un domaine instable.

#### 6.5. DISCUSSION - INFLUENCE DES DIFFERENTS PARAMETRES ADIMENSIONNELS

Le seuil se définit logiquement (cf. notamment § 5.2.8) par les valeurs que prennent, sur la surface seuil, les deux paramètres réduits  $u_{00}$  paramètre adimensionnel de débit, et  $\mu$  paramètre adimensionnel contenant la pulsation. La valeur du paramètre  $\mu$  permet, en utilisant sa relation de définition :

$$\mu = \frac{\omega(k+s+y)}{2\pi}$$

le calcul de la pulsation réduite  $\omega$ , de la fréquence réduite  $\frac{\omega}{2\pi}$  ou de la période réduite  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

Ces valeurs au seuil dépendent de la valeur que prennent les cinq paramètres restants ( $g$ ,  $f$ ,  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $s$ ). Du fait de l'allure compliquée, et même dans certaines gammes de paramètres tourmentée, de la surface seuil, il n'est pas possible de tirer des conclusions rigoureusement générales de l'étude numérique précédente.

De même que nous avons été amenés (§ 6.3.1) à faire varier les paramètres supplémentaires ( $l_0$ ,  $l_1$ ,  $s$ ) autour d'un cas de référence : le cas (2) ( $l_0 = 0$ ,  $l_1 = 1$ ,  $s = 0$ ), nous sommes amenés ici, pour l'étude de l'influence de ces mêmes paramètres à choisir un couple de valeurs pour  $g$  et  $f$  que nous appellerons valeurs nominales. Nous choisissons ces valeurs pour qu'elles soient réalistes, notamment dans le cadre de l'étude expérimentale [1] (cf. 6.3.4.).  $g$  peut être positif ou négatif, sa valeur expérimentale est positive et souvent très faible.  $f$  varie beaucoup avec la longueur du canal et on remarque que si  $f$  est suffisant, l'influence de  $g$  est faible. Ceci nous amène à choisir comme valeurs nominales :

$$g = 0 \quad f = 3$$

(VI-2)

Les conclusions tirées des comparaisons ci-dessous sont valables en toute rigueur dans le cas de référence et pour les valeurs nominales de  $g$  et  $f$ . Sauf indication contraire, elles le sont toutefois qualitativement dans une gamme assez large de valeurs des paramètres couvrant la plupart des cas rencontrés expérimentalement.

Le tableau I donne pour les valeurs nominales de  $g$  et  $f$  celles que prennent  $u_{00}$ ,  $\mu$  et  $\frac{\omega}{2\pi}$  au seuil dans les dix cas étudiés numériquement.

Dans le cas (10) on trouve que le fonctionnement est impossible pour  $g = 0$ , dès qu'il y a "effet de densité" (c'est-à-dire pour  $u_{00} = 1/s = 0,1$ ). Pour permettre une comparaison plus significative avec les autres cas, nous avons ici fait abstraction de la surface ( $S$ ) pour déterminer les valeurs portées dans le tableau I. Au demeurant, aux conditions nominales, on est fort près de la surface ( $S$ ) et les valeurs du tableau I

donnent un excellent ordre de grandeur au voisinage des conditions nominales.

6.5.1. Influence de la longueur réduite de la zone adiabatique amont  $l_0$

- a) influence globale. Schématisée sur la figure 38 (comparaison aux valeurs nominales du cas (4) avec le cas (2) de référence), cette influence est stabilisatrice. Pour de fortes valeurs de  $g$ , cette influence peut toutefois devenir déstabilisatrice (cf. § 6.4.2). Une augmentation de  $l_0$  tend à diminuer  $\mu$  ainsi que la fréquence des oscillations au seuil.
- b) Influence de  $l_0$  en tant que longueur introduisant un frottement supplémentaire. Schématisée sur la figure 39 (comparaison aux valeurs nominales du cas (5) avec le cas (2) de référence et comparaison supplémentaire du cas (4) avec le cas (6)), cette influence est stabilisatrice. La valeur du paramètre  $\mu$  au seuil n'est pratiquement pas affectée par la valeur  $l_0$  frottement. La fréquence décroît légèrement, dans les conditions nominales, lorsque  $l_{of}$  croît.
- c) Influence de  $l_0$  en tant que longueur introduisant une inertie supplémentaire. Schématisée sur la figure 40 (comparaison aux valeurs nominales du cas (6) avec le cas (2) de référence et comparaison supplémentaire du cas (4) avec le cas (5)), cette influence affecte peu la stabilité (elle est stabilisatrice ou déstabilisatrice suivant la valeur considérée pour le paramètre  $g$ ). La valeur du paramètre  $\mu$  au seuil et la fréquence décroissent lorsque  $l_0$  inertie croît.

En conclusion, on peut dire qu'une augmentation de la longueur de zone adiabatique amont  $l_0$  stabilise surtout par l'intermédiaire des termes de frottement et diminue la valeur du paramètre  $\mu$  au seuil, surtout par l'intermédiaire des termes d'inertie.

6.5.2. Influence de la longueur réduite de la zone adiabatique aval  $l_1$ 

Nous n'avons étudié que l'influence globale, la décomposition des termes contenant  $l_1$  en termes de gravité, de frottement et d'inertie n'étant qu'approchée (§ 6.3.1). Cette influence est schématisée sur la figure 41 (comparaison aux valeurs nominales des cas (1) (2) et (3)). Elle est déstabilisatrice, mais joue de moins en moins quand  $l_1$  croît. Conformément aux résultats obtenus au chapitre précédent (§ 5.3.2), on peut prévoir que  $l_1$ , continuant à croître, finira par avoir une influence stabilisatrice,  $u_{00}$  passant par un maximum. La valeur du paramètre  $\mu$  au seuil augmente avec  $l_1$  (aux fortes valeurs de  $g$ , toutefois, cette influence s'inverse) alors que dans les conditions nominales la fréquence décroît quand  $l_1$  croît.

Possédant des résultats numériques sur les pulsations au seuil, nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question de la légitimité de l'introduction dans les calculs de longueurs équivalentes de gravité ;  $l_1$  gravité, de frottement :  $l_1$  frottement, d'inertie :  $l_1$  inertie. Ces longueurs équivalentes s'introduisent lorsque la zone adiabatique aval comporte des singularités (cf. Annexe I) et sont données par les formules (18) , (19) et (20) de l'annexe I.

On a vu dans cette annexe que ces formules sont valables dans la mesure où :

$$e^{-c \frac{z^* - 1}{m u_{00}}}$$

est assimilable à l'unité en tout point de la zone adiabatique aval.

Pour une abscisse  $z$  ( $1 \leq z \leq 1 + l_1$ ) et un instant donnés  $z^*$  est l'abscisse qu'aurait la particule correspondante si la section était restée celle de la partie chauffante.  $z^*$  est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} z^* = 1 \quad \text{pour } z = 1 \\ \Delta z^* = \sigma_i \Delta z \quad \text{pour un tronçon où la section est :} \end{array} \right.$$

$$A_i = \sigma_i A_c \quad (\text{cf. annexe I - § 5}).$$

Au seuil  $c = i\omega$  et  $e^{-c \frac{z^* - 1}{m u_{00}}} = \cos \omega \frac{z^* - 1}{m u_{00}} - i \sin \omega \frac{z^* - 1}{m u_{00}}$

L'introduction des longueurs équivalentes sera justifiée si :

$$\frac{\omega}{2\pi} \frac{z^* - 1}{m u_{00}} \approx 0 + n \quad (n \text{ entier positif})$$

Pour le cas de référence (les ordres de grandeur des paramètres  $u_{00}$  et  $\mu$  au seuil varient peu autour de ce cas de référence, ce qui confère une certaine généralité au calcul ci-dessous) on a (tableau I) :

$$\frac{\omega}{2\pi} \approx 0,29$$

En l'absence de singularités et à la sortie de la zone adiabatique aval  $z^* - 1 = z - 1 = l_1$

et 
$$\frac{\omega}{2\pi} \frac{z^* - 1}{m u_{00}} = \frac{\omega}{2\pi} y \approx 0,25$$

Les singularités sont souvent des élargissements conduisant à des valeurs  $z^* > z$  et la valeur de 0,25 trouvée est un minimum.

Une telle valeur est incompatible avec la condition imposée. Elle conduit en effet à :

$$\omega \frac{z^* - 1}{m u_{00}} = \frac{\pi}{2}$$

Il en résulte que, sauf cas particulier, il n'est pas légitime d'introduire des longueurs équivalentes de zone adiabatique aval pour tenir compte de singularités éventuelles dans cette zone. On ne peut donc tenir compte de ces singularités sans réécrire les équations du modèle.

### 6.5.3. Influence de la "sous-saturation" réduite s

Schématisée sur la figure 42 (comparaison, aux valeurs nominales des cas (7), (8), (9) et (10) avec le cas (2) de référence) elle est complexe :

- a) pour des valeurs de s faibles ( $s < 1,5$  environ dans les conditions nominales) elle est fortement déstabilisatrice, ( $u_{00}$  passe de 0,142 à 0,332 lorsque s passe de 0 à 1) et cette influence s'atténue lorsque s croît, pour s'annuler vers  $s = 1,5$  ou  $s = 2$ .

La valeur du paramètre  $\mu$  au seuil décroît rapidement lorsque s croît, de même que la fréquence (dans les mêmes conditions que ci-dessus,  $\mu$  décroît de 0,85 à 0,63, soit de 26 % et  $\frac{\omega}{2\pi}$  décroît de 0,29 à 0,20, soit de 30 %).

Ces actions sont beaucoup plus fortes que celles résultant de la simple diminution de la longueur chauffante avec effet de densité, diminution à laquelle on serait tenté d'attribuer, en première approximation (cf. chapitre V - § 5.2.7), l'influence de s.

En effet, pour  $s = 1$ , par exemple (cas (8)), la longueur de la zone chauffante sans effet de densité est, aux conditions nominales (formule III-2),  $\lambda_0 = u_{00} s = 0,332$  soit 33,2 % de la longueur chauffante totale. Si s agissait simplement par réduction de la longueur chauffante avec effet de densité, ce cas (8), caractérisé par les longueurs réduites :  $l_0$  (adiabatique amont) = 0,  $l_c$  (chauffante) = 1,  $l_1$  (adiabatique aval) = 1, serait équivalent à un cas sans "sous-saturation" où la longueur chauffante dimensionnelle serait diminuée de 33,2 % et où la longueur chauffante sans effet de densité serait considérée comme longueur adiabatique amont. Ce cas "équivalent" a pour paramètres adimensionnels d'après les équations de définition de ces paramètres (§ 14):

$$l_0 = \frac{L_0}{L_c} = \frac{0,332}{0,668} \approx 0,5$$

$$l_1 = \frac{L_1}{L_c} = \frac{1}{0,668} \approx 1,5$$

$$s = 0$$

Les conditions nominales du cas (8)  $g = 0$ ,  $f = 3$  sont à remplacer, toujours en utilisant les équations de définition, par :

$$g = \frac{G (H_c R_o)^2 \sin \varphi}{W^2 L_c} = \frac{0}{0,668} = 0$$

$$f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D} = 3 \cdot 0,668 \simeq 2$$

On devrait dans ce nouveau cas trouver le seuil pour :

$$u_{oo} = \frac{U_{oo} H_c R_o}{W L_c} = \frac{0,332}{0,668} \simeq 0,5$$

Par interpolation entre les cas (2), (3) et (4), il est aisé de constater que le seuil du cas "équivalent" sera en fait aux environs de  $u_{oo} = 0,13$  et ne peut en aucune façon dépasser 0,15.

Ainsi le cas (8) ( $u_{oo} = 0,332$ ) est bien plus instable que le cas dit "équivalent" ( $u_{oo} = 0,13$ ) et il faut admettre que l'introduction d'une "sous-saturation" agit beaucoup plus qu'en modifiant la longueur chauffante avec effet de densité. L'apparition d'une frontière mobile entre les deux zones chauffantes (à masse spécifique constante et à masse spécifique variable) est le seul phénomène permettant d'expliquer les termes "déstabilisateurs" supplémentaires. Ceci est conforme aux remarques du chapitre II (§ 2.5.) dans lequel on notait l'apparition de tels termes dans la condition aux limites dynamique.

Pour les valeurs de  $s$  supérieures à l'unité, le domaine de valeurs de  $g$  et  $f$  où il y a instabilité dès apparition de l'effet de densité (dès l'apparition de l'ébullition dans l'analogie physique) s'étend. Dans ce domaine on a vu au § 6.4.2 (cas (8)) que la surface seuil est confondue avec le plan  $u_{oo} = 1/s$  (et que la valeur de  $\mu$  au seuil n'est pas calculable avec les équations du modèle). L'action de  $s$  devient alors stabilisatrice, une augmentation de  $s$  augmentant la puissance (ou diminuant le débit) pour laquelle apparaît l'effet de densité (l'ébullition).

b) Pour des valeurs de s fortes ( $s > 2$  environ dans les conditions nominales) l'influence de s devient stabilisatrice même dans les zones de plus en plus réduites au voisinage de  $g = 0$  où la surface seuil fait encore partie de la surface ( $\Sigma$ ) ( $u_{00}$  passe de 0,332 à 0,269 lorsque s passe de 1 à 3) et la valeur de  $u_{00}$  au seuil semble suivre une loi très voisine de la loi hyperbolique en  $1/s$  correspondant à l'apparition de l'effet de densité. Sur la figure 42 et dans la mesure où l'interpolation entre les cas (9) et (10) est valable, il est frappant de constater que la courbe donnant en fonction de s la valeur de  $u_{00}$  au seuil est presque parallèle à l'hyperbole  $u_{00} = 1/s$ . Cette influence de s est donc finalement stabilisatrice, dans la mesure où elle retarde l'apparition de l'effet de densité. L'influence stabilisatrice de s, maximale pour des valeurs de s de l'ordre de 2 à 3, s'atténue lorsque s croît. Pour des valeurs de s de l'ordre de 6 (aux conditions nominales) on retrouve des valeurs de  $u_{00}$  au seuil du même ordre que pour  $s = 0$ .

La valeur du paramètre  $\mu$  au seuil, ainsi que celle de la fréquence, continue à décroître lorsque s croît, comme ci-dessus (§ a) mais la surface seuil, dans la zone où elle fait partie de la surface ( $\Sigma$ ), se complique, les nappes successives de ( $\Sigma$ ) s'enchevêtrent et des valeurs de  $\mu$  très différentes peuvent coexister (cf. cas (10)).

En extrapolant, sur la figure 42, la courbe donnant la valeur de  $\mu$  en fonction de s, on peut penser que ces nappes d'ordre supérieur à 1 commencent à intervenir au moment où la valeur de  $\mu$  correspondant à la première nappe devient très faible, vers  $s = 5$  à 6. La zone où la surface seuil fait encore partie de ( $\Sigma$ ) est alors très voisine de la surface (S).

Pour connaître parfaitement l'influence de s, il faudrait poursuivre l'étude numérique notamment aux environs de  $s = 2$  et de  $s = 5$ . Néanmoins, les quatre valeurs de s étudiées ici donnent une bonne idée de cette influence et on peut retenir que :

- pour les faibles valeurs de  $s$ , le seuil du phénomène d'instabilité apparaît, lorsqu'on augmente la puissance ou le débit, nettement après l'"effet de densité". Dans ce cas, l'influence de  $s$  est déstabilisatrice,
- pour les fortes valeurs de  $s$ , le seuil du phénomène apparaît presque en même temps que l'"effet de densité". Dans ce cas, l'influence de  $s$  est stabilisatrice.

#### 6.5.4. Influence du paramètre de frottement $f$

Sauf pour des valeurs de  $f$  très faibles ( $f < 1$ ) où la surface seuil peut être compliquée, (apparition éventuelle des nappes d'ordre supérieur à l'unité), l'influence d'une augmentation de  $f$  est de tendre à "niveler" la surface seuil autour d'une même valeur moyenne.

Il en résulte que pour des valeurs de  $g$  négatives ou faibles en valeur absolue, ou au contraire positives et suffisamment grandes, une augmentation de  $f$  est défavorable à la stabilité. C'est le contraire pour des valeurs de  $g$  intermédiaires.

Pour  $g = 0$  (valeur nominale), l'influence de  $f$  est schématisée sur la figure 43. On constate sur cette figure que dès que  $f > 3$  son influence est très faible, quel que soit le cas considéré.

De même, l'influence de  $f$  sur le paramètre  $\mu$  au seuil est très faible.

#### 6.5.5. Influence du paramètre de gravité $g$

Du fait de l'allure tourmentée de la surface seuil, cette influence varie beaucoup avec tous les autres paramètres.

Au voisinage des valeurs nominales pour  $g$  et  $f$ , une augmentation de  $g$  est en général légèrement déstabilisatrice.

Pour de fortes valeurs de  $g$ , cette influence est en général, au contraire, stabilisatrice. Ceci est conforme aux conclusions du chapitre précédent où il a été montré qu'une valeur suffisamment grande de  $g$  conduisait (au moins dans certains cas) à un fonctionnement stable.

En général, la valeur du paramètre  $\mu$  au seuil augmente avec  $g$ .

Le fonctionnement avec des valeurs négatives de  $g$  (écoulement vers le bas) n'est possible et stable que dans une gamme restreinte pour les valeurs des autres paramètres.

Par contre, dans cette gamme on peut atteindre d'une manière stable des valeurs de la vitesse réduite  $u_{00}$  plus faibles qu'en écoulement ascendant.

Enfin, une fois de plus on vérifie que le seuil évolue de manière continue lorsque  $g$  passe d'une valeur négative à une valeur positive en s'annulant, c'est-à-dire lorsqu'on passe d'un écoulement ascendant à un écoulement horizontal ou ascendant.

#### 6.6. RECHERCHE DES PARAMETRES LES PLUS CARACTERISTIQUES POUR LE DEBIT ET LA FREQUENCE AU SEUIL

Nous avons été amenés, tant pour des raisons physiques que par commodité, à définir le seuil par la valeur que prend sur la surface seuil le paramètre de débit  $u_{00}$  pour un ensemble de valeurs des autres paramètres  $u_{00} = u_{00}(g, f, l_0, l_1, s)$ .

De même, la fréquence au seuil est définie par la valeur que prend sur la surface seuil le paramètre  $\mu = \mu(g, f, l_0, l_1, s)$ .

D'autre part, nous avons vu au chapitre précédent quelles significations physiques sont attachées aux nombreux paramètres et groupements figurant dans les équations du modèle.

Bien que jusqu'ici le paramètre  $u_{00}$  apparaisse comme le meilleur pour l'étude de la dynamique du système, il n'est pas prouvé qu'il soit effectivement le meilleur pour le repérage des seuils d'instabilité. Le mécanisme du phénomène étant assez simple, on peut penser que son apparition est liée à la valeur critique d'un certain paramètre, cette valeur critique variant peu d'un cas à l'autre. Si tel est le cas, il pourrait être possible, à partir d'études expérimentales, d'en tirer un critère approximatif de stabilité, problème important en pratique et dont on a vu (§ 2.3.4) qu'il était insoluble d'une manière rigoureuse.

De même pour la fréquence au seuil.

Nous allons donc passer en revue, en nous inspirant de la liste du paragraphe 5.2.9, les valeurs numériques au seuil des différents paramètres fonction du débit d'une part, de la fréquence d'autre part et susceptibles d'avoir une signification physique importante pour le phénomène.

Les raisonnements ci-dessous ne sont ni complets ni rigoureux, mais nous pensons qu'ils peuvent donner des idées intéressantes sur le mécanisme du phénomène.

#### 6.6.1. Paramètres de débit (relatifs au régime permanent précédent immédiatement le seuil)

- La figure 42 nous conduit à introduire immédiatement la longueur chauffante sans effet de densité  $\lambda_0 = u_{00} s$ . En effet, si cette longueur est trop grande, le phénomène d'instabilité apparaît presque en même temps que l'effet de densité.

- Nous étudierons les différents retards ou temps de parcours :

$$\frac{l_0}{u_{00}} + s + k + y \text{ (temps de parcours total)}$$

$$s + k + y \text{ (temps de parcours total, longueur adiabatique amont exclue)}$$

$k + y$  (temps de parcours de la zone où il y a effectivement effet de densité)

$k$  (temps de parcours de la zone chauffante à effet de densité)

$s + y$   
 $s + k$  } (retards intervenant dans "l'équation en c").

Nous calculerons également :

- le volume spécifique réduit  $m$ , ou la vitesse réduite  $m u_{00}$  à la sortie du canal chauffant,

- la masse réduite totale, présente par unité de longueur et de section :

$$\frac{l_0 + \lambda_0 + \xi_0 + \xi_{10}}{l_0 + l + l_1} = \frac{l_0 + u_{00} s + u_{00} k + \frac{l_1}{m}}{l_0 + l + l_1}$$

- la masse réduite, présente par unité de longueur et de section, longueur adiabatique amont exclue :

$$\frac{\lambda_0 + \xi_0 + \xi_{10}}{l + l_1}$$

- la masse réduite, présente par unité de longueur et de section dans la zone où il y a effectivement effet de densité :

$$\frac{\xi_0 + \xi_{10}}{l - \lambda_0 + l_1}$$

- la masse réduite, présente par unité de longueur et de section dans la zone chauffante à effet de densité :

$$\frac{\xi_0}{l - \lambda_0}$$

Les résultats sont rassemblés dans le tableau II pour les valeurs nominales  $g = 0$  ;  $f = 3$ .

On remarque d'abord que sur l'ensemble des dix cas étudiés tous les paramètres étudiés varient beaucoup, celui qui varie le moins en valeur relative étant  $k + y$ .

$k + y$  varie de 2,10 à 4,54, soit des variations possibles de 37 % autour de la valeur moyenne 3,32. (Encore n'est-il pas tenu compte dans ces nombres des cas intermédiaires nécessitant des interpolations).

Par contre, si on introduit, comme le suggère la figure 42, deux régimes différents, l'un où le seuil est loin de l'apparition de l'effet de densité ( $\lambda_0$  petit devant 1), l'autre où il en est proche ( $\lambda_0$  voisin de 1), on constate qu'un certain nombre de paramètres varient peu en valeur relative.

\* Dans la zone des fortes valeurs de  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 > \frac{2}{3}$ ), ce qui correspond à des valeurs de  $s$  supérieures à deux environ, on peut admettre semble-t-il que les instabilités apparaissent lorsque la longueur chauffante sans effet de densité  $\lambda_0$  atteint une certaine valeur sensiblement indépendante de  $s$ . Le nombre de cas étudiés (deux) n'est pas suffisant pour fixer cette valeur, mais à titre indicatif, pour des valeurs de  $l_0$  voisines de 0 et de  $l_1$  voisines de 1 :

$$\lambda_0 \simeq 0,8$$

\* Dans la zone des faibles valeurs de  $\lambda_0$  ( $\lambda_0 < \frac{2}{3}$ ) (cas (1) à (8)) deux paramètres au moins varient très peu.

$m u_{00}$  varie de 1 à 1,15, mais ce paramètre n'est pas très significatif car il dépend peu de  $u_{00}$ . En effet,  $m u_{00} = (1 - s) u_{00} + 1$  et il faudrait plutôt considérer  $(m u_{00} - 1)$  qui varie beaucoup en valeur relative (de 0 à 0,151, soit 100 % autour de sa valeur moyenne).

Par contre  $(s + k)$  varie de 1,95 à 2,40, soit de  $\pm 10$  % seulement autour de sa valeur moyenne 2,18.

De plus  $(s + k)$  permet le calcul de  $u_{00}$  avec une précision acceptable pour un ordre de grandeur. On a en effet :

$$\frac{d(s+k)}{du_{00}} = \frac{dk}{du_{00}} = \frac{1}{m} \frac{dm}{du_{00}} = \frac{-1}{u_{00} m u_{00}}$$

$m u_{00}$  étant toujours voisin de 1, il vient :

$$\left| \frac{d u_{00}}{u_{00}} \right| \approx d(s+k)$$

A titre indicatif, au voisinage des conditions nominales et pour :

$$0 \leq l_{of} \leq 1$$

$$0 < l_{oi} < 1$$

$$0 \leq l_1 \leq 2$$

$$0 \leq s \leq 1,5$$

on constate, par interpolation, que l'on a toujours :

$$1,90 \leq s+k \leq 2,70$$

soit :

$$s+k = 2,30 \pm 0,40$$

Ceci permet de déterminer  $u_{00}$  à  $\pm 40\%$  près.

$s+k$  est le temps de parcours de la zone chauffante, ce qui permet d'aboutir à la conclusion vraisemblable suivante : lorsqu'elle n'apparaît pas sensiblement en même temps que l'effet de densité, l'instabilité apparaît lorsque le temps de parcours de la zone chauffante atteint une certaine valeur. L'influence sur ce temps de parcours, donc sur le mécanisme de la sous-saturation et des longueurs adiabatiques amont et aval, est relativement faible. (Il ne faut pas se méprendre sur ce terme "faible", dans le cas ci-dessus il conduit tout de même à des écarts sur la valeur de  $u_{00}$  au seuil, donc sur la valeur du débit ou de la puissance au seuil, de  $\pm 40\%$ ).

Dans une étude expérimentale, il serait intéressant d'essayer de corrélérer, non pas sous la forme  $u_{00} = u_{00}(g, f, l_0, l_1, s)$ , mais sous la forme (théoriquement équivalente) :  $s+k = \text{fonction}(g, f, l_0, l_1, s)$ .

#### 6.6.2. Paramètres de fréquence

Il paraît logique d'associer une fréquence à un temps. Nous prendrons comme temps les différents temps de parcours du paragraphe précédent.

Les résultats sont rassemblés dans le tableau III pour les valeurs nominales  $g = 0$ ,  $f = 3$ .

Comme pour les débits, mais de manière encore plus nette, on est amené à disjoindre les cas où le seuil est voisin de l'apparition de l'effet de densité (cas (9) et (10) qui conduisent à des variations considérables des différents paramètres calculés).

Pour les autres cas ((1) à (8)), le paramètre qui varie le moins est  $\mu$ , c'est-à-dire le paramètre retenu pour les calculs. Il varie de 0,63 à 0,90, soit de  $\pm 18\%$  autour de sa valeur moyenne 0,76.

De plus,  $\mu = \frac{\omega}{2\pi}(s+k+y)$  étant, pour des valeurs données des paramètres, proportionnel à  $\frac{\omega}{2\pi}$ , sa connaissance avec une certaine précision permet le calcul de  $\frac{\omega}{2\pi}$  avec la même précision relative.

A titre indicatif, au voisinage des conditions nominales et pour :

$$0 \leq l_{of} \leq 1$$

$$0 \leq l_{oi} \leq 1$$

$$0 \leq l_1 \leq 2$$

$$0 \leq s \leq 1$$

on constate par interpolation que l'on a toujours :

$$0,40 \leq \mu \leq 0,90$$

soit  $\mu = 0,65 \pm 40 \%$ .

Ceci permet de déterminer  $\mu$  à  $\pm 40 \%$  près, en supposant  $u_{00}$  connu.  $s + k + y$  est le temps de parcours de la zone chauffante et de la longueur adiabatique aval. On peut en déduire la conclusion vraisemblable suivante : lorsqu'il n'apparaît pas sensiblement en même temps que l'effet de densité, le phénomène d'instabilité conduit à des périodes qui sont liées au temps de parcours de l'ensemble zone chauffante zone adiabatique aval.

Au voisinage des conditions nominales, la période est environ une fois et demie ce temps.

Dans une étude expérimentale, il serait intéressant d'essayer de corréler non pas sous la forme :

$$\frac{\omega}{2\pi} = \text{fonction}(g, f, l_0, l_1, s)$$

mais sous la forme théoriquement équivalente :

$$\mu = \mu(g, f, l_0, l_1, s)$$

Il est remarquable de constater que si le déclenchement du phénomène est plutôt lié au temps de parcours de la zone chauffante, sa période est plutôt liée au temps de parcours de l'ensemble zone chauffante-zone adiabatique aval. Il n'y a aucun illogisme dans ces deux faits.

#### 6.7. CONCLUSION

L'étude numérique des équations du modèle nous a permis d'acquérir de nombreux renseignements sur son comportement, tout en confirmant ou précisant ceux réunis dans les chapitres précédents.

Le seuil d'instabilité est défini par la valeur que prend sur la "surface seuil" le paramètre adimensionnel de débit  $u_{00}$  pour des valeurs données des autres paramètres.

- L'ordre de grandeur de cette valeur de  $u_{00}$  est 0,2. Elle varie surtout avec le paramètre de sous-saturation  $s$  (variations extrêmes pour  $u_{00}$  : de 0,01 à 1).
- La valeur du paramètre  $u_{00}$  au seuil semble principalement conditionnée par un domaine de valeurs critiques du temps de parcours de la zone chauffante ( $s + k$ ).
- La fréquence au seuil est la mieux définie par la valeur que prend, sur la "surface seuil", le paramètre :

$$\mu = \frac{\omega(k+s+v)}{2\pi}$$

Son ordre de grandeur est 0,7 et  $\mu$  varie relativement peu autour de cette valeur (variations extrêmes 0,40 à 1, sauf cas particuliers : points trop proches du domaine de fonctionnement impossible au sens du chapitre III et donnant des valeurs de  $\mu < 0,40$ , ou valeurs particulières des paramètres).

La valeur de la fréquence au seuil semble principalement conditionnée par le temps de parcours au seuil de l'ensemble zone chauffante-zone adiabatique aval. La période est de l'ordre de grandeur de ce temps de parcours ( $s + k + v$ ).

- Une augmentation du paramètre adimensionnel de gravité  $g$  est en général légèrement déstabilisatrice, mais elle peut être stabilisatrice pour certaines combinaisons de valeurs des paramètres. Le paramètre  $\mu$  au seuil croît légèrement avec  $g$ .
- Une augmentation du paramètre adimensionnel de frottement  $f$  joue très peu et peut être stabilisatrice aussi bien que déstabilisatrice suivant les valeurs des paramètres. Cette action peut toutefois être importante si  $f$  est faible ( $f < 0,5$ ).
- Une augmentation de la longueur réduite de frottement de la zone adiabatique amont  $l_{of}$  est légèrement stabilisatrice et n'a que peu d'influence sur la valeur du paramètre  $\mu$  au seuil.

- Une augmentation de la longueur réduite d'inertie de la zone adiabatique amont  $l_{0i}$  affecte peu la stabilité (dans un sens ou dans l'autre) et diminue légèrement la valeur du paramètre  $\mu$  au seuil.
- Une augmentation de la longueur réduite de la zone adiabatique aval  $l_1$  est déstabilisatrice, d'autant plus que  $l_1$  est petit et augmente légèrement la valeur du paramètre  $\mu$  au seuil. Il semble bien toutefois que lorsque  $l_1$  atteint des valeurs de l'ordre de 3 son action sur la stabilité change de sens. Les résultats numériques nous ont montré qu'en général, il n'était pas possible d'introduire simplement dans les équations du modèle, des singularités situées dans la zone adiabatique aval, alors que cette introduction est très facile dans la zone adiabatique amont.
- Une augmentation de la sous-saturation réduite  $s$  est déstabilisatrice pour des valeurs de  $s$  faibles ( $s < 2$  environ) et est stabilisatrice au-delà.

Le paramètre  $\mu$  au seuil décroît quand  $s$  croît pour des valeurs de  $s$  faibles. Pour des valeurs de  $s$  plus importantes on ne peut plus rien dire.

Ces actions sont nettement plus importantes que celles de tous les autres paramètres. En pratique, c'est cependant le paramètre  $s$  qui est susceptible de varier le plus.

Nous disposons maintenant de suffisamment de renseignements pour vérifier la validité du modèle.

Nous ferons cette vérification en deux étapes :

- qualitativement dans le chapitre suivant, en comparant les tendances expérimentales aux tendances données par le modèle. Du point de vue de la philosophie du modèle, c'est cette vérification qui est la plus importante (cf. Première Partie et paragraphe 2.3. de la Seconde Partie).

- quantitativement ensuite par comparaison avec les résultats donnés dans [1]. Cette vérification est beaucoup moins significative compte tenu des schématisations poussées retenues pour les lois des écoulements diphasés. Elle est toutefois nécessaire avant toute application du modèle à des cas particuliers.

**TABLEAU I**

Valeurs au seuil des paramètres  $u_{oo}$  et  $\mu$  pour les conditions nominales ( $g=0$ ,  $f=3$ )

| Définition du cas |                              |       |     |          |                |                                |                     |                            |             |                                 |        |
|-------------------|------------------------------|-------|-----|----------|----------------|--------------------------------|---------------------|----------------------------|-------------|---------------------------------|--------|
| CAS N°            | $l_o$                        | $l_l$ | s   | $u_{oo}$ | $\mu$          | $m = 1 - s + \frac{1}{u_{oo}}$ | $k = \text{Log } m$ | $y = \frac{1}{\mu u_{oo}}$ | $s + k + y$ | Fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$ | CAS N° |
| ①                 | 0                            | 0     | 0   | 0,100    | 0,76           | 11                             | 2,40                | 0                          | 2,40        | 0,32                            | 1      |
| ②                 | 0                            | 1     | 0   | 0,142    | 0,85           | 8,04                           | 2,08                | 0,88                       | 2,96        | 0,29                            | 2      |
| ③                 | 0                            | 2     | 0   | 0,151    | 0,90           | 7,62                           | 2,03                | 1,74                       | 3,77        | 0,24                            | 3      |
| ④                 | 1                            | 1     | 0   | 0,108    | 0,72           | 10,26                          | 2,33                | 0,90                       | 3,23        | 0,22                            | 4      |
| ⑤                 | $l_{of} = 1$<br>$l_{oi} = 0$ | 1     | 0   | 0,106    | 0,85           | 10,44                          | 2,35                | 0,90                       | 3,25        | 0,26                            | 5      |
| ⑥                 | $l_{of} = 0$<br>$l_{oi} = 1$ | 1     | 0   | 0,138    | 0,71           | 8,25                           | 2,11                | 0,88                       | 2,99        | 0,24                            | 6      |
| ⑦                 | 0                            | 1     | 0,5 | 0,265    | 0,78           | 4,27                           | 1,45                | 0,88                       | 2,83        | 0,28                            | 7      |
| ⑧                 | 0                            | 1     | 1   | 0,332    | 0,63           | 3,01                           | 1,10                | 1                          | 3,10        | 0,20                            | 8      |
| ⑨                 | 0                            | 1     | 3   | 0,269    | $\approx 0,20$ | 1,72                           | 0,54                | 2,16                       | 5,70        | 0,035                           | 9      |
| ⑩*                | 0                            | 1     | 10  | 0,075    | 1,63           | 4,33                           | 1,46                | 3,08                       | 14,54       | 0,11                            | 10     |

\* Aux conditions nominales on est dans le domaine où le fonctionnement est impossible. Aux fins de comparaison du cas (10) aux autres, nous avons fait abstraction de la surface (S) pour déterminer les valeurs de cette ligne.

**TABLEAU II**

Recherche des paramètres de débit au seuil les plus caractéristiques (Conditions nominales  $g=0, f=3$ )

| Cas N°       | s   | $u_{oo}$ | $\lambda_o$ | m     | $mu_{oo}$ | k    | Retards                          |       |      |          |       | $\frac{l_o + \lambda_o + \xi_o + \xi_{1o}}{1_o + 1 + 1_1}$ | $\frac{\lambda_o + \xi_o + \xi_{1o}}{1 + 1_1}$ | $\frac{\xi_o + \xi_{1o}}{1 - \lambda_o + 1_1}$ | $\frac{\xi_o}{1 - \lambda_o}$ |
|--------------|-----|----------|-------------|-------|-----------|------|----------------------------------|-------|------|----------|-------|--|--|--|-------------------------------|
|              |     |          |             |       |           |      | $\frac{l_o}{u_{oo} + s + k + y}$ | s+k+y | k+y  | s+y      | s+k   |  |  |  |                               |
|              |     |          |             |       |           |      |                                  |       |      |          |       |  |  |  |                               |
| ①            | 0   | 0,100    | 0           | 11    | 1,100     | 2,40 | 2,40                             | 2,40  | 2,40 | 0        | 2,40  | 0,240  | 0,240  | 0,240  | 0,240                         |
| ②            | 0   | 0,142    | 0           | 8,04  | 1,142     | 2,08 | 2,96                             | 2,96  | 2,96 | 0,88     | 2,08  | 0,210  | 0,210  | 0,210  | 0,295                         |
| ③            | 0   | 0,151    | 0           | 7,62  | 1,151     | 2,03 | 3,77                             | 3,77  | 3,77 | 1,74     | 2,03  | 0,189  | 0,189  | 0,189  | 0,306                         |
| ④            | 0   | 0,108    | 0           | 10,26 | 1,108     | 2,33 | 12,49                            | 3,23  | 3,23 | 0,90     | 2,33  | 0,450  | 0,175  | 0,175  | 0,252                         |
| ⑤            | 0   | 0,106    | 0           | 10,44 | 1,106     | 2,35 | 3,25*                            | 3,25  | 3,25 | 0,90     | 2,35  | 0,172*   | 0,172  | 0,172  | 0,249                         |
| ⑥            | 0   | 0,138    | 0           | 8,25  | 1,138     | 2,11 | > 2,99*                          | 2,99  | 2,99 | 0,88     | 2,11  | > 0,206*   | 0,206  | 0,206  | 0,291                         |
| ⑦            | 0,5 | 0,265    | 0,133       | 4,27  | 1,133     | 1,45 | 2,83                             | 2,83  | 2,33 | 1,38     | 1,95  | 0,375  | 0,375  | 0,331  | 0,443                         |
| ⑧            | 1   | 0,332    | 0,332       | 3,01  | 1         | 1,10 | 3,10                             | 3,10  | 2,10 | 2        | 2,10  | 0,515  | 0,515  | 0,419  | 0,547                         |
| ⑨            | 3   | 0,269    | 0,807       | 1,72  | 0,462     | 0,54 | 5,70                             | 5,70  | 2,70 | 5,16     | 3,54  | 0,767  | 0,767  | 0,608  | 0,752                         |
| ⑩            | 10  | 0,075    | 0,750       | 4,33  | 0,325     | 1,46 | 14,54                            | 14,54 | 4,54 | 13,08    | 11,46 | 0,545  | 0,545  | 0,272  | 0,436                         |
| Maxi<br>Mini |     | 4,43     |             | 6,40  | 3,54      | 4,45 | 6,06                             | 6,06  | 2,16 | $\infty$ | 5,88  | 4,46   | 4,46   | 3,54   | 3,14                          |
| Maxi<br>Mini |     | 3,32     |             | 3,66  | 1,15      | 2,18 | 5,21                             | 1,57  | 1,79 | $\infty$ | 1,23  | 3,00   | 3,00   | 2,44   | 2,28                          |
| Cas 1 à<br>8 |     |          |             |       |           |      |                                  |       |      |          |       |  |  |  |                               |

\*  $l_{oi} = 0$  implique que la longueur réelle soit nulle (il n'y a que des pertes de charge) ;  $l_{oi} = 1$ , qu'elle soit positive.

**TABLEAU III**

Recherche des paramètres de fréquence au seuil les plus caractéristiques (Conditions nominales  $g=0$ ,  $f=3$ )

| cas n°                      | $\frac{\omega}{2\pi}$ | $\mu = \frac{\omega}{2\pi} (k+s+y)$ | $\frac{\omega k}{2\pi}$ | $\frac{\omega}{2\pi} \left( \frac{1}{u_{\infty}} + s+k+y \right)$ | $\frac{\omega}{2\pi} (k+y)$ | $\frac{\omega}{2\pi} (s+y)$ | $\frac{\omega}{2\pi} (s+k)$ |
|-----------------------------|-----------------------|-------------------------------------|-------------------------|---|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| ①                           | 0,32                  | 0,76                                | 0,76                    | 0,76  | 0,76                        | 0                           | 0,76                        |
| ②                           | 0,29                  | 0,85                                | 0,60                    | 0,85  | 0,85                        | 0,25                        | 0,60                        |
| ③                           | 0,24                  | 0,90                                | 0,48                    | 0,90  | 0,90                        | 0,42                        | 0,48                        |
| ④                           | 0,22                  | 0,72                                | 0,52                    | 2,78  | 0,72                        | 0,20                        | 0,52                        |
| ⑤                           | 0,26                  | 0,85                                | 0,61                    | 0,85*   | 0,85                        | 0,26                        | 0,61                        |
| ⑥                           | 0,24                  | 0,71                                | 0,50                    | > 0,71*   | 0,71                        | 0,21                        | 0,50                        |
| ⑦                           | 0,28                  | 0,78                                | 0,40                    | 0,78  | 0,64                        | 0,38                        | 0,54                        |
| ⑧                           | 0,20                  | 0,63                                | 0,22                    | 0,63  | 0,43                        | 0,41                        | 0,43                        |
| ⑨                           | 0,035                 | 0,20                                | 0,019                   | 0,20  | 0,095                       | 0,181                       | 0,124                       |
| ⑩                           | 0,11                  | 1,63                                | 0,164                   | 1,63  | 0,51                        | 1,46                        | 1,28                        |
| Maxi<br>mini                | 9,1                   | 8,2                                 | 40                      | 13,9  | 9,5                         | $\infty$                    | 10,3                        |
| Maxi<br>mini<br>(cas 1 à 8) | 1,6                   | 1,43                                | 3,46                    | 4,41  | 2,1                         | $\infty$                    | 1,77                        |

\* cf. remarque tableau II.

## CHAPITRE VII

### COMPARAISON AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

#### I - Etude de tendances

##### 7.1. INTRODUCTION

A la fin de l'étude "interne" du modèle monophasé et avant de passer à la suite logique (comparaison avec l'expérience, interprétation, utilisation) il est nécessaire de rappeler dans quel contexte doit se situer cette suite.

Le modèle monophasé a été conçu comme une étude de mécanisme. Son but fondamental est de constater, d'une part si l'effet de densité peut expliquer un comportement oscillatoire, d'autre part si les lois de ce comportement sont qualitativement comparables à celles de l'expérience

La schématisation mise en oeuvre est précieuse, car elle a permis une étude analytique et numérique relativement simple, mais elle rend hasardeuse toute comparaison directe avec la réalité.

Dans cet esprit nous avons réparti sur deux chapitres la comparaison des résultats donnés par le modèle avec ceux de l'expérience. Dans ce premier chapitre, le plus important, nous vérifierons que le modèle rend correctement compte des tendances expérimentales en reprenant un à un tous les paramètres figurant dans les équations du modèle.

La schématisation ci-dessus a supprimé un certain nombre d'autres paramètres (par exemple, variation du coefficient de frottement en double phase). Nous avons supposé, pour faire cette schématisation, que leur

action était faible (mais pas forcément négligeable) devant celle de l'effet de densité.

Supposant acquis que le modèle rend correctement compte des tendances expérimentales, nous tenterons "pour voir" dans le chapitre suivant la comparaison quantitative avec l'expérience. Si elle est mauvaise, nous ne pourrions qu'en déduire que la schématisation adoptée est quantitativement mauvaise, ce qui est possible. Si elle est bonne, nous en déduirons que, dans les conditions expérimentales considérées, l'influence globale des paramètres négligés est faible devant celle de l'effet de densité. Ceci pourra renforcer (mais non fonder) notre confiance dans le modèle.

Nous avons déjà vu dans le chapitre précédent que l'ordre de grandeur au seuil des valeurs du paramètre  $u_{00}$  repérant ce seuil était bon (valeurs autour de 0,2).

Dans le tableau I établi au chapitre précédent l'ordre de grandeur de la fréquence adimensionnelle est également 0,2, ce qui, compte tenu de la valeur du temps caractéristique de l'ordre de 0,2 seconde (cf. § 6.3.2), conduit à des fréquences réelles de l'ordre du cycle/seconde. Ce sont bien des fréquences de cet ordre que l'on observe expérimentalement. Il nous reste à étudier l'influence des différents paramètres réels. Ces paramètres ont notamment été recensés chapitre I (§ 1.4) ; ce sont :

. Les paramètres de géométrie :

- longueurs  $L_0$ ,  $L_C$ ,  $L_1$  des différents tronçons de conduite (zones adiabatique amont, chauffante, adiabatique aval)
- diamètre hydraulique  $D$  (et section de passage  $A$ )
- coefficient de frottement  $\Lambda$
- inclinaison  $\varphi$
- singularités, situées dans la zone adiabatique amont (pertes de charge singulières, changements brusques de section, de rugosité, d'inclinaison) (rappelons qu'on ne peut tenir compte de singularités situées dans la zone adiabatique aval).

• Les propriétés physiques :

- valeurs de la masse spécifique  $R_0$  et de l'enthalpie caractéristique  $H_c$ .
- Ces propriétés varient avec le fluide et la pression.

• L'accélération de la pesanteur G

• Les paramètres de fonctionnement :

- vitesse à l'entrée en régime permanent  $U_{00}$
- enthalpie à l'entrée -  $H_0$
- densité volumique de puissance  $W$ .

Les paramètres réels interviennent par leur influence sur les paramètres adimensionnels du modèle par les formules que nous rappelons ici (VII-1) :

$$l_0 = \frac{L_0}{L_c}$$

ou, au cas où la zone adiabatique amont comporte des singularités (cf. annexe I) :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_0 \text{ friction} = \sum_i \left( \frac{l_i}{\sigma_i^2} \frac{D_c}{D_i} \frac{\Lambda_i}{\Lambda_c} \right) + \sum_i \frac{D_c}{L_c} \frac{1}{\Lambda_c} \left( \frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \\ l_0 \text{ inertie} = \sum_i \frac{l_i}{\sigma_i} \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_i = \frac{L_i}{L_c} \quad \left. \begin{array}{l} \text{longueur réduite d'un tronçon adiabatique amont de section} \\ \text{constante (repéré par l'indice } i \text{).} \end{array} \right\} \\ \sigma_i = \frac{A_i}{A_c} \quad \left. \begin{array}{l} \text{rapport des sections de passage du tronçon considéré et} \\ \text{de la zone chauffante} \end{array} \right\} \\ \psi_i \quad \left. \begin{array}{l} \text{coefficient de perte de charge de la singularité } i \text{ (située par} \\ \text{définition à l'entrée du tronçon } i \text{) rapporté à la vitesse dans} \\ \text{le tronçon } i. \end{array} \right\}$$

$$l_1 = \frac{L_1}{L_c}$$

$$s = \frac{H_0}{H_c}$$

$$u_{00} = \frac{U_{00} \Theta_c}{L_c} = \frac{U_{00} H_c R_0}{L_c W}$$

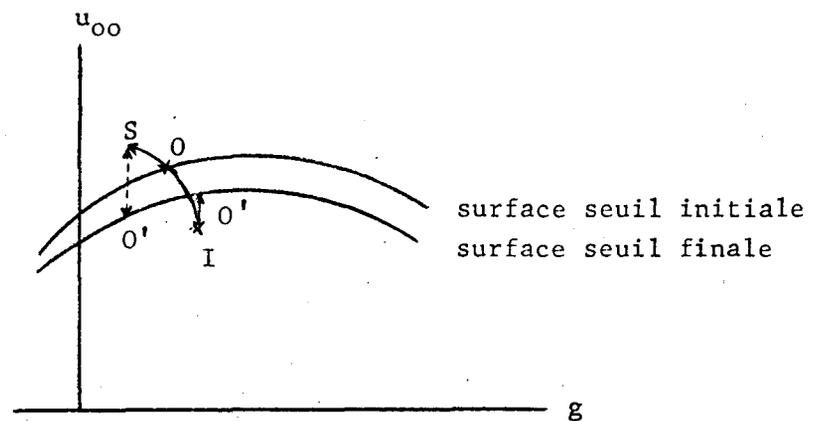
$$g = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2}{L_c} = \frac{G \sin \varphi (H_c R_0)^2}{L_c W^2}$$

$$f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D}$$

$$\omega = \Omega \Theta_c = \Omega \frac{H_c R_0}{W}$$

Comme au chapitre précédent, nous dirons qu'un paramètre a une action stabilisatrice si, tous les autres restant constants, une augmentation de sa valeur fait passer d'un point O de la surface seuil à un point S appartenant à la région de stabilité (compte tenu de l'évolution éventuelle correspondante de la surface seuil).

Son action est dite déstabilisatrice dans le cas contraire (passage d'un point O à un point I du domaine instable ou impossible) (cf. schéma ci-contre)



De plus, comme au chapitre précédent, cette définition est relative au premier des seuils rencontrés, sur la surface ( $\Sigma$ ), au cours d'évolutions,

soit à débit décroissant, soit à puissance croissante (cf. § 6.3.5).  
 Pour le suivant (où, dans ces évolutions, on retrouve la stabilité) les influences peuvent en effet être inversées.

Pour connaître l'influence du paramètre étudié sur la fréquence au seuil, il sera nécessaire partant du point S ou I de se ramener sur la surface seuil en un point O' par action sur les paramètres de fonctionnement ( $U_{00}$ ,  $W$ ,  $H_0$ ).

Par convention, et pour des raisons de simplicité, nous ferons cette opération en maintenant  $W$  et  $H_0$  constants et en agissant uniquement sur la vitesse à l'entrée  $U_{00}$ . C'est un type d'évolution fréquent, voisin de plus dans les cas courants des évolutions à  $U_{00}$  et  $H_0$  constants et à densité volumique de puissance  $W$  variable (on a montré au chapitre précédent - § 6.4.1 - que dans cette évolution à  $W$  variable, le point représentatif se déplaçait sur une parabole et que cette parabole s'éloigne peu en pratique de la verticale correspondant à l'évolution à  $U_{00}$  variable). Seule une évolution où l'enthalpie  $H_0$  varie pourra avoir, sur la fréquence au seuil, une action nettement différente.

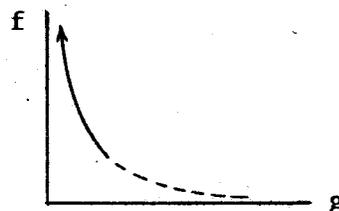
## 7.2. INFLUENCE DES PARAMETRES DE GEOMETRIE

### 7.2.1. Influence de la longueur chauffante $L_c$

Son action est complexe. Lorsque  $L_c$  croît, le point représentatif décrit dans l'espace ( $g$ ,  $f$ ,  $u_{00}$ ) une courbe.

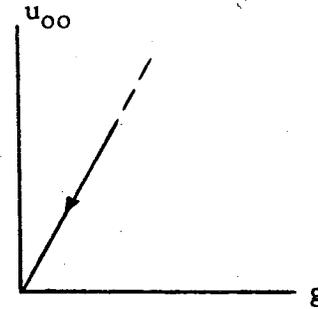
- Sa projection sur le plan ( $g$ ,  $f$ ) est une hyperbole équilatère d'axes, les axes de coordonnées. Il la décrit en allant vers les grandes valeurs de  $f$  (action stabilisatrice faible en général au voisinage des conditions nominales). Ceci se déduit des équations (VII-1) par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} fg = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2 \Lambda}{2 D} \\ f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D} \end{array} \right.$$



- Sa projection sur le plan de fonctionnement  $(g, u_{00})$  est une droite passant par l'origine. Il la décrit en se rapprochant de l'origine (action déstabilisatrice importante). On a en effet, toujours d'après les équations (VII-1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{00} = \frac{U_{00}}{G \sin \varphi \cdot \Theta_c} g \\ u_{00} = \frac{U_{00} \Theta_c}{L_c} \end{array} \right.$$



Par ailleurs, les valeurs de  $l_0$  frottement,  $l_0$  inertie et  $l_1$  décroissent comme  $1/L_c$ . Cette action est déstabilisatrice par  $l_0$  frottement, stabilisatrice par  $l_1$  et la tendance qui l'emporte dépend des valeurs initiales de  $l_{of}$ ,  $l_{oi}$  et  $l_1$ .

Au total, et dans les cas courants, la valeur de  $u_{00}$  au seuil variant peu avec les paramètres adimensionnels autres que  $s$ , une augmentation de  $L_c$  a une action déstabilisatrice par son effet sur  $u_{00}$ .

A titre d'exemple, plaçons-nous sur la surface seuil au point nominal défini au chapitre précédent :

$$g = 0 \quad f = 3$$

et partant du cas (3)  $l_0 = 0$ ,  $l_1 = 2$ ,  $s = 0$  qui donne comme seuil :

$$u_{00} = 0,151 \quad (\text{avec } \mu = 0,90, \quad \frac{\omega}{2\pi} = 0,24)$$

doublons la longueur chauffante. Il vient :

$$\begin{array}{l} g' = 0 \quad f' = 6 \\ l_0' = 0 \quad l_1' = 1 \quad s' = 0 \quad (\text{cas (2)}) \end{array}$$

et :

$$u_{00}' = 0,076$$

Cette valeur est nettement dans le domaine instable : l'augmentation de  $L_c$  a été fortement déstabilisatrice (en augmentant  $U_{00}$  on retrouve le seuil pour  $u''_{00} = 0,146$ ).

#### Action sur la fréquence

L'action sur le paramètre  $\mu$  est assez faible (cf. conclusion du chapitre précédent), la fréquence réduite  $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\mu}{(k+s+y)}$  varie donc surtout par  $y$  qui décroît lorsque  $L_c$  croît.  $\Theta_c$  étant indépendant de  $L_c$ , la fréquence réelle semble croître avec  $L_c$ .

Dans l'exemple ci-dessus on retrouve le seuil par augmentation de  $U_{00}$  pour :

$$u''_{00} = 0,146 \text{ et } \mu'' = 0,87, \text{ il vient } \frac{\omega''}{2\pi} = 0,30$$

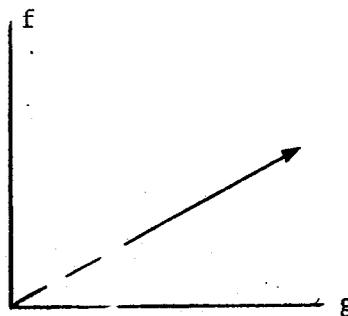
La fréquence réelle, comme la fréquence réduite, a augmenté de 25 %.

#### REMARQUE

Cette influence de  $L_c$ , comme déjà précisé, a été établie dans le cas où tous les autres paramètres restaient constants et notamment  $W$ , densité volumique de puissance.

Il est intéressant, pour les applications pratiques où l'on s'intéresse surtout à la puissance extractible, de savoir quelle est l'influence d'une augmentation de  $L_c$  à puissance totale constante, c'est-à-dire  $W L_c = \text{cte}$ .

Dans l'espace  $(g, f, u_{00})$  le point représentatif se déplace alors dans un plan  $u_{00} = \text{cte}$  et, dans ce plan, suivant une droite passant par l'origine et en l'éloignant de celle-ci. L'action est faible et son sens dépend des valeurs initiales des paramètres.



Il en est de même comme précédemment pour l'action par l'intermédiaire de  $l_{of}$ ,  $l_{oi}$  et  $l_1$ .

On ne peut tirer de conclusion générale.

Dans l'exemple ci-dessus à :  $g = 0$      $f = 3$   
 $l_0 = 0$      $l_1 = 2$      $s = 0$     (cas (3) )  
 correspond :  
 $g' = 0$      $f' = 6$   
 $l_0' = 0$      $l_1' = 1$      $s' = 0$     (cas (2) )  
 $u'_{00} = 0,151$

Cette valeur est dans le domaine stable, l'augmentation de  $L_c$  à puissance totale constante a été légèrement stabilisatrice (par diminution de  $U_{00}$  le seuil se retrouve pour  $u''_{00} = 0,146$ ).

Expérimentalement, la longueur chauffante n'a jamais été variée, à notre connaissance, dans une même série d'expériences. On ne peut donc savoir quel est sur ce point l'accord entre le modèle monophasé et la réalité.

### 7.2.2 Influence du diamètre hydraulique D

En l'absence de singularités, il n'intervient très simplement que par :

$$f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D}$$

Dans les cas courants, son action est comme celle de  $f$ , très faible, aussi bien sur le seuil que sur la fréquence au seuil et son sens dépend de la valeur des paramètres adimensionnels.

Si la valeur initiale du paramètre  $f$  n'est pas grande et dans le cas des écoulements ascendants, une augmentation du diamètre hydraulique, donc de la section de passage, peut favoriser l'instabilité.

Une telle tendance a effectivement été observée par la General Electric [33].

### 7.2.3. Influence du coefficient de frottement $\Lambda$

Elle est exactement l'inverse de celle de D puisque  $\Lambda$  n'intervient également que par  $f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D}$ .

L'influence d'une augmentation du frottement réparti sur toute la longueur n'a jamais été étudiée systématiquement et on sait que, tout au moins dans le modèle (cf. notamment annexe I), elle est très différente de l'influence de pertes de charge non réparties.

En pratique, d'ailleurs, le coefficient de frottement varie avec l'enthalpie dès qu'il y a écoulement diphasé et le modèle ne tient pas compte de cet effet.

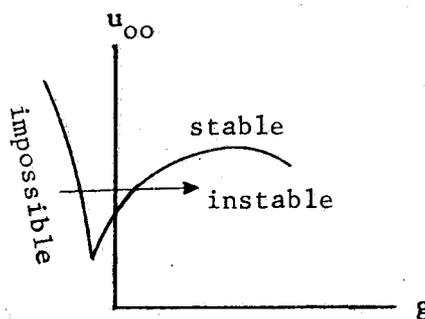
### 7.2.4. Influence de l'inclinaison

Elle n'intervient que par  $g = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2}{L_c}$ .

L'angle  $\varphi$  croissant de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $+\frac{\pi}{2}$  lorsque l'écoulement passe de vertical descendant à horizontal puis vertical ascendant, une augmentation de cet angle  $\varphi$  augmente algébriquement le paramètre  $g$ . Pour de faibles valeurs absolues de  $g$  (ce sont les cas pratiques) le schéma ci-contre montre que cette augmentation est toujours destabilisatrice. Elle fait croître le paramètre  $\mu$  et la fréquence au seuil.

Ici encore on manque d'essais systématiques. La General Electric [34] qui a étudié l'influence de

l'inclinaison sur certains paramètres des écoulements double phase ne compare pas les seuils obtenus dans les différents cas.



### 7.2.5. Influence de la longueur de zone adiabatique aval $L_1$

Elle n'intervient que par  $l_1$  qui lui est proportionnel  $l_1 = \frac{L_1}{L_c}$ . Le chapitre précédent (§ 6.5.2) a montré qu'une augmentation de  $L_1$  avait une influence déstabilisatrice, d'autant plus forte que  $l_1$  est faible, mais que cette influence pouvait s'inverser pour les grandes valeurs de  $l_1$  ( $l_1 > 3$  soit  $L_1 > 3 L_c$ ). Ces cas n'ont jamais été étudiés expérimentalement.

Au voisinage des conditions nominales et pour  $s = 0$ , la valeur du paramètre  $u_{00}$  au seuil croît de 40 % environ quand  $L_1$  croît de 0 à  $L_c$ .

Cette influence déstabilisatrice est universellement admise dans la littérature.

La valeur du paramètre  $\mu$  au seuil croît lorsque  $L_1$  croît, mais  $l_1$  intervenant dans la formule reliant  $\mu$  à la fréquence  $\frac{\omega}{2\pi}$ , on constate que la fréquence (adimensionnelle et dimensionnelle) décroît lorsque  $L_1$  croît.

### 7.2.6. Influence de la longueur de zone adiabatique amont $L_0$

Elle n'intervient que par  $l_0$  qui, en l'absence de singularités (cf. § suivant) lui est proportionnelle :

$$l_0 = \frac{L_0}{L_c}$$

Le chapitre précédent a montré (§ 6.5.1) qu'une augmentation de  $L_0$  avait une influence stabilisatrice et entraînait une décroissance des valeurs du paramètre  $\mu$  et de la fréquence au seuil.

L'influence de ce paramètre, au demeurant peu important dans les applications pratiques, n'a pas été étudiée expérimentalement.

En effet, en l'absence de singularités, sa valeur est très faible et n'apparaît dans les installations expérimentales que pour des impératifs pratiques (nécessités de mesures du débit, de la température, pression etc... à l'entrée).

### 7.2.7. Influence de singularités situées dans la zone adiabatique amont.

Elles interviennent par l'intermédiaire de  $l_{of}$  et  $l_{oi}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{of} = \sum_i \left( \frac{l_i}{\sigma_i^2} \frac{D_c}{D_i} \frac{\Lambda_i}{\Lambda_c} \right) + \sum_i \frac{D_c}{L_c} \frac{1}{\Lambda_c} \left( \frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_i^2 - 1} \right) \\ l_{oi} = \sum_i \frac{l_i}{\sigma_i} \end{array} \right.$$

et jouent un rôle important en pratique (par exemple, dans de nombreux réacteurs nucléaires on place un diaphragme à l'entrée des canaux pour corriger la caractéristique hydraulique interne de ceux-ci et éviter ou retarder les redistributions de débit).

Au cours du chapitre précédent (§ 6.5.1) il a été établi qu'une augmentation de  $l_{of}$  avait une influence stabilisatrice et une influence négligeable sur la fréquence (adimensionnelle ou dimensionnelle) au seuil. Il a été établi également qu'une augmentation de  $l_{oi}$  avait une influence très faible sur la stabilité, mais diminuait la fréquence (adimensionnelle ou dimensionnelle) au seuil.

Passons maintenant en revue les singularités possibles :

#### a) Pertes de charge localisées (coudes, diaphragmes, etc...)

Elles agissent sur  $l_{of}$  uniquement par l'intermédiaire de leur coefficient de perte de charge  $\psi_i$ .

Elles sont stabilisatrices conformément aux tendances notées dans toutes les études expérimentales relatives à cette importante catégorie de singularités.

Elles n'affectent pas la fréquence, conformément également à la loi empirique déjà citée (§ 7.2.5) qui ne fait intervenir que la zone "double phase".

b) Tronçons de section différente de celle de la zone chauffante

Une augmentation de section ( $\sigma_i = \frac{A_i}{A_c} > 1$ ) sur tout ou partie de la zone adiabatique amont fait décroître  $l_{of}$  et  $l_{oi}$ . Cette influence est déstabilisatrice et augmente la fréquence.

De telles singularités ne semblent pas avoir été étudiées expérimentalement.

c) Tronçons de diamètre hydraulique ou de rugosité différentes de celle de la zone chauffante

Une diminution du diamètre hydraulique ou une augmentation de la rugosité a la même influence qu'une perte de charge localisée (augmentation de  $l_{of}$  et tendance à la stabilisation).

Il n'y a pas eu d'étude systématique distincte de celles citées dans le paragraphe a) ci-dessus. Notons toutefois que dans l'étude [1] où  $l_{of}$  et  $l_1$  ont été variés, on a assuré la constance de  $l_{oi}$  en plaçant sur la longueur adiabatique amont, soit un diaphragme, soit un tronçon de longueur courte mais finie et de faible section. Les résultats ne permettent effectivement pas de distinguer ces deux types de singularités.

d) Tronçons d'inclinaison différente

Il a déjà été vu (§ 5.2.5) que ce type de singularité ne joue aucun rôle.

7.2.8. Influence de l'accélération de la pesanteur G (ou plus généralement de l'accélération d'un champ de forces)

Nous la comptons comme paramètre de géométrie, car elle n'intervient que par :

$$g = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2}{L_c}$$

Le lecteur est prié de se reporter au paragraphe 7.2.4 où est étudiée l'influence de l'inclinaison. Les deux paramètres  $G$  et  $\sin \varphi$  n'ont jamais été distingués expérimentalement.

### 7.3. INFLUENCE DES PROPRIETES PHYSIQUES

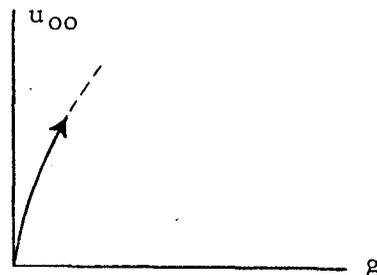
Elles interviennent (cf. annexe XII) par la masse spécifique  $R_0$  et l'enthalpie caractéristique rapportée à l'unité de volume  $H_c R_0$ .

a) La masse spécifique  $R_0$  ne figure que par  $s = \frac{H_0 R_0}{(H_c R_0)}$  (VII-1)

Son influence (à  $H_c R_0$  constant) est donc celle de  $s$  (chapitre précédent - § 6.5.3).

b) L'enthalpie volumique caractéristique  $H_c R_0$

D'après les formules (VII-1) lorsque  $H_c R_0$  croît,  $s$  décroît proportionnellement à  $1/H_c R_0$  et le point représentatif décrit par ailleurs dans le plan de fonctionnement  $(g, u_{00})$  une parabole d'axe l'axe des  $g$  et de sommet l'origine. Il décrit cette parabole en s'éloignant de l'origine, puisque sont vérifiées les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} g = \frac{G \sin \varphi L_c}{U_{00}^2} u_{00}^2 \\ u_{00} = \frac{U_{00}}{L_c W} (H_c R_0) \end{array} \right.$$


Lorsque  $s$  est faible ( $s < 2$  environ) ces deux influences sont stabilisatrices. Lorsque  $s$  est fort, les deux influences se contrarient.

On constate cependant (formules VII-1) que :

$$u_{00} s = \frac{U_{00} H_0 R_0}{L_c W} = \text{constante}$$

et on sait (§ 6.5.3 et figure 42) que telle est à peu près la loi que suit la valeur du paramètre  $u_{00}$  au seuil lorsque  $s$  varie ( $s > 3$ ), toutes choses

restant égales par ailleurs. L'influence de l'augmentation de  $(H_c R_0)$  se réduit donc en première approximation, lorsque  $s$  est grand, à celle qui résulte de la simple augmentation de :

$$g = \frac{G \sin \varphi}{L_c W^2} (H_c R_0)^2$$

Cette action est faible et, compte tenu de l'approximation ci-dessus, on ne peut en fait rien dire sur son sens (cf. § 6.6.).

La fréquence adimensionnelle au seuil  $\frac{\omega}{2\pi}$  (qui n'est calculable que si  $s$  n'est pas trop grand) tend à croître lorsque  $(H_c R_0)$  croît, aussi bien du fait de  $s$  (qui décroît) que de celui de  $g$  (qui croît).

On ne peut rien dire sur la fréquence dimensionnelle :

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{W}{H_c R_0}$$

qui dépend de trois quantités croissantes  $(\frac{\omega}{2\pi})$ ,  $W$  et  $(H_c R_0)$ .

En réalité, les propriétés physiques ne sont pas des paramètres indépendants. Elles sont imposées par la nature du fluide et la pression qui sont les véritables paramètres indépendants.

### 7.3.1. Influence de la nature du fluide

Pour éviter les oscillations on a intérêt à adopter un fluide présentant une forte enthalpie volumique caractéristique  $(H_c R_0)$  et une faible masse spécifique  $R_0$ , pour diminuer  $s$  (§ a.) et stabiliser par l'effet de  $H_c R_0$  à  $s$  faible (§ b.).

On pourrait également, jouant sur l'inversion de l'influence de la "sous-saturation"  $s$  pour de grandes valeurs de  $s$  essayer l'inverse, mais outre que ce procédé serait moins efficace (on a vu au § b. que  $H_c R_0$  jouait très peu pour de grandes valeurs de  $s$ ), il est peu réaliste car il revient à reculer l'apparition de l'ébullition qui, aux grandes valeurs du

paramètre  $s$ , est pratiquement confondue avec le seuil (cas (9) et surtout (10) du chapitre précédent) : c'est un procédé pour supprimer le problème et non le résoudre, en se privant des avantages de l'ébullition !

Il n'y a pas dans la littérature de comparaison des différents fluides. Des essais ont été faits avec des installations au pentane ou au fréon, mais avec des géométries différentes, rendant impossible la comparaison directe.

On peut cependant faire les remarques suivantes :

- $(H_c R_0)$  est l'inverse du coefficient d'expansion  $\frac{d \frac{1}{R}}{dH}$  du fluide. Le rôle déstabilisateur d'un fort coefficient d'expansion est effectivement noté dans la littérature [24] .
- La nécessité d'obtenir une valeur forte de  $(H_c R_0)$  avec une valeur faible de  $R_0$  fait qu'en pratique  $R_0$  joue peu pour les liquides courants et qu'il faut rechercher les fluides ayant une forte enthalpie caractéristique, c'est-à-dire (cf. annexe XII) une forte chaleur latente de vaporisation. L'eau n'est donc pas, du point de vue des instabilités, un "mauvais" fluide. Il est intéressant de le montrer sur un exemple.

On utilise quelquefois, pour simuler les écoulements diphasés eau-vapeur à haute pression, des écoulements diphasés de fréon en respectant le seul paramètre simple :

$$\beta = \frac{R_g}{R_0}$$

rapport des masses spécifiques (études de configurations d'écoulements etc...). Montrons que pour les instabilités cette similitude est grossièrement fautive.

$$\text{- Pour l'eau à } 80 \text{ kgf/cm}^2 \text{ (annexe XII) } \left\{ \begin{array}{l} \beta = 5,73 \cdot 10^{-2} \\ R_0 = 725,3 \text{ kg/m}^3 \\ (H_c R_0) = 0,9 \cdot 10^8 \text{ J/m}^3 \end{array} \right.$$

- Pour le fréon 12 à  $12,4 \text{ kgf/cm}^2$  environ, on trouve en utilisant les mêmes hypothèses de calcul (et le même glissement) :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= 5,65 \cdot 10^{-2} \text{ (donc équivalent)} \\ R_0 &= 1213 \text{ kg/m}^3 \text{ (comparaison légèrement défavorable} \\ &\quad \text{au fréon)} \\ H_c R_0 &= 1,28 \cdot 10^7 \text{ J/m}^3 \text{ (comparaison nettement défavora-} \\ &\quad \text{ble au fréon et qui rapproche celui-} \\ &\quad \text{ci de l'eau sous } 8 \text{ kgf/cm}^2 \text{ pour} \\ &\quad \text{laquelle } H_c R_0 = 1,85 \cdot 10^7 \text{ J/cm}^3 \end{aligned} \right\}$$

Le fréon 12 possède en effet une faible chaleur latente de vaporisation (ici  $29,79 \text{ kcal/kg}$ ).

### 7.3.2. Influence de la pression

Une augmentation de la pression provoque une variation (décroissance faible en général) de la masse spécifique  $R_0$ , mais surtout fait croître l'enthalpie caractéristique  $H_c$  par son action sur  $\beta = \frac{R_g}{R_0}$  dans les formules du type de celle de l'annexe XII :

$$H_c = \frac{H_{1g} \beta \gamma}{1 - \beta}$$

$\beta$  est presque proportionnel à la pression  $P$  et les variations de  $H_{1g}$  et de  $\gamma$  sont faibles.

Faisant décroître  $R_0$  et croître ( $H_c R_0$ ) une augmentation de pression est donc stabilisatrice. C'est l'avis unanime de tous les auteurs.

D'après le paragraphe b. ci-dessus, il semblerait que dans certains cas ( $s > 3$ ) cette action de la pression soit très faible et même puisse s'inverser. En fait, des valeurs de  $s$  supérieures à 3 sont rares dans les cas courants, au moins pour l'eau à haute pression car :

- dès que la pression dépasse une valeur moyenne, de l'ordre de  $25 \text{ kgf/cm}^2$ , ces valeurs correspondent à des sous-saturations dimensionnelles peu réalistes,

- de plus, le phénomène dit d'ébullition locale fait que la frontière d'apparition de l'effet de densité est reportée vers l'amont, ce qui provoque une réduction importante de  $s$  (cf. annexe XIII).

#### 7.4. INFLUENCE DES PARAMETRES DE FONCTIONNEMENT

7.4.1. Influence de l'enthalpie à l'entrée -  $H_0$  (de par le choix de l'origine des enthalpies, l'enthalpie  $H_0$  est l'équivalent de la sous-saturation à l'entrée dans un écoulement diphasé).

Cette influence est celle de  $s$  (cf. § 6.5.3) :

- Lorsque la sous-saturation  $s$  à l'entrée est faible, une augmentation de sa valeur est déstabilisatrice.
- Lorsque, au contraire, la sous-saturation  $s$  à l'entrée est forte (cas dont on a vu ci-dessus qu'il était plus fréquent expérimentalement aux pressions modérées) une augmentation de la valeur a une influence stabilisatrice.

Cette inversion de l'influence de la sous-saturation a été nettement notée par deux auteurs [48] et [41] :

- \* Le premier, dans des conditions voisines de l'étude expérimentale [1], mais pour des sous-saturations faibles, non explorées systématiquement dans [1] (la sous-saturation correspondant à l'inversion de l'effet est de l'ordre de  $2,5^\circ\text{C}$ ) ce qui explique que dans [1] seule l'influence stabilisatrice est nette.
- \* Le second, à plus haute pression ( $50 \text{ kgf/cm}^2$ ) n'a pas exploré la zone où l'effet  $s$  s'inverse, mais la situe par extrapolation aux environs d'une sous-saturation de  $35^\circ\text{C}$ .

Les ordres de grandeur ne sont pas respectés (on sait (cf. annexes XII et XIII) ce qu'il faut penser de la validité de l'ordre de grandeur de  $s$ ) mais les tendances sont bonnes et notamment le sens d'évolution avec la pression de la sous-saturation d'inversion de l'effet de  $s$ .

#### 7.4.2. Influence du débit et de la densité volumique de puissance

Nous avons vu que lorsqu'on part d'un point de fonctionnement stable, une diminution du débit ou une augmentation de la puissance permet d'atteindre le seuil puis, dans certains cas, conduit à un nouveau domaine de stabilité.

Tous les expérimentateurs sont évidemment d'accord sur le premier seuil. Plusieurs et notamment [24] et [49] observent aussi dans ces évolutions des seuils multiples.

### 7.5. OBSERVATIONS COMPLEMENTAIRES

#### 7.5.1. Seuils multiples

Ainsi qu'il vient d'être dit, le modèle rend bien compte qualitativement des seuils multiples observés quelquefois dans les expériences où la variation monotone d'un paramètre fait apparaître d'abord l'instabilité puis de nouveau la stabilité et même [1] une nouvelle fois l'instabilité.

#### 7.5.2. Périodes

De nombreux auteurs, et notamment [1], ont constaté que la période au seuil était liée, de manière grossière mais nette, au temps de parcours, soit de l'ensemble canal chauffant - zone adiabatique aval, soit de la zone double phase proprement dite (La relation observée n'est pas assez précise pour permettre de trancher).

Nous avons effectivement constaté au chapitre précédent (§ 6.6.2) que la période était grossièrement liée au temps de parcours de l'ensemble canal chauffant - zone adiabatique aval.

Aux conditions nominales nous avons trouvé une période un peu supérieure à ce temps de parcours (50 % environ), ce qui semble notamment en accord avec [1].

## 7.6. CONCLUSIONS

Cette revue des différentes tendances apparaissant dans le modèle monophasé nous a permis de constater les faits suivants :

- Il n'y a jamais contradiction entre les tendances du modèle et les tendances expérimentales. Au contraire, lorsqu'elles sont connues avec certitude, ces dernières coïncident toujours avec celles du modèle.
- Le modèle rend compte d'un certain nombre d'observations expérimentales caractéristiques, telles que seuils multiples ou relation entre période et temps de parcours.
- Les ordres de grandeur des paramètres au seuil coïncident de façon inespérée avec les ordres de grandeur expérimentaux. Seul le paramètre  $s$  satisfait moins bien cette règle, mais on a vu (annexes XII et XIII) quelles difficultés il y a à faire correspondre aux paramètres expérimentaux une valeur précise de  $s$ .

A la lumière de ces constatations, l'"effet de densité" apparaît bien comme susceptible d'expliquer le phénomène.

De plus, de nombreuses possibilités de vérifications ultérieures du modèle sont apparues dans ce chapitre. Il suffit de faire la liste des paramètres ayant une action sensible dans le modèle et dont l'influence n'a pas encore été étudiée expérimentalement (tels que longueur chauffante, inclinaison, etc...).

La coïncidence des ordres de grandeur rend particulièrement intéressante la comparaison quantitative du modèle avec l'expérience, comparaison qui fera l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE VIII

### COMPARAISON AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

#### II - Comparaison quantitative

##### 8.1. INTRODUCTION

Nous avons vu, dans l'introduction du chapitre précédent, dans quel esprit il convenait de faire cette comparaison avec l'expérience. Une fois acquise une certitude raisonnable sur la possibilité d'expliquer le phénomène étudié par l'"effet de densité" et après avoir constaté que les ordres de grandeur des paramètres aux seuils dans le modèle et dans la réalité physique correspondaient, la question se pose de savoir si la schématisation adoptée dans la mise en équation est compatible avec une utilisation, au moins semi-quantitative, du modèle.

La compréhension du mécanisme étant acquise, une réponse positive à cette dernière question serait fort utile pour des calculs prévisionnels.

Nous comparerons donc les résultats du modèle avec ceux de l'étude expérimentale [1] déjà utilisée plusieurs fois ci-dessus, et sur laquelle nous allons tout d'abord donner dans les paragraphes suivants quelques détails.

##### 8.2. DESCRIPTION DE L'INSTALLATION

L'étude a été faite sur deux installations, schématisées sur la figure 44, mais nous ne décrivons que la boucle dite CF4, qui a servi aux

principales mesures (la boucle Cendrillon, de schéma voisin, était surtout destinée à une visualisation des phénomènes).

### 8.2.1. Circuit du fluide

La boucle CF 4 peut fonctionner jusqu'à une pression de  $10 \text{ kgf/cm}^2$ , les essais ayant été effectués à  $8 \text{ kgf/cm}^2$  environ. La section d'essais alimentée en parallèle avec un by-pass de diamètre important (50 mm) se compose de :

- un tronçon de raccordement et de mesure, de longueur et de diamètre non constants, en partie incliné.

La partie aval de ce tronçon est verticale et de même diamètre (6 mm) que le canal chauffant. Elle sert de longueur de tranquillisation.

- le canal chauffant proprement dit, tube vertical, de diamètre intérieur 6 mm et de longueur 1,20 m ou 1,16 m, suivant les cas.
- une "cheminée" verticale, composée de deux tronçons. Le premier, qui fait suite au canal chauffant, a le même diamètre et une longueur de 2,45 m (cheminée "longue") ou de 0,20 m (cheminée "courte") ; le second, qui est le tronçon de raccordement au by-pass et au séparateur, a un diamètre de 25 mm et une longueur de 1,6 m.

L'ensemble section d'essai, by-pass, est alimenté par une pompe de forte hauteur manométrique totale, laminée au refoulement. Ceci, combiné au fort rapport des sections de passage by-pass / canal chauffant, permet de maintenir entre les deux extrémités de ce dernier une différence de pression constante avec une très bonne approximation, quel que soit le comportement du canal chauffant. Cette condition aux limites, qui est celle du modèle, a été choisie pour simuler le comportement du "canal chaud" d'un réacteur nucléaire. Le coeur d'un tel réacteur comporte en effet un nombre très grand de canaux parallèles et le comportement du "canal chaud" n'influe pratiquement pas sur le débit des autres, donc sur la différence de pression considérée.

L'ensemble section d'essai - by-pass peut également fonctionner en convection naturelle. Dans ce cas, le retour se fait par le "by-pass".

Entre la pompe et la section d'essai une préchauffe permet d'atteindre la température d'entrée désirée.

Entre la sortie de la section d'essai et le retour de la pompe, se rencontrent, dans l'ordre, un séparateur eau-vapeur, un condenseur qui joue en même temps le rôle de pressuriseur et un réfrigérant.

### 8.2.2. Mesures

Nous ne citons ici que les mesures utilisées pour l'étude des seuils d'instabilité. Ce sont :

- des mesures de températures (thermocouples Ni-Ni Cr et sondes à résistance de Pt), et notamment celles du fluide à l'entrée et à la sortie du canal chauffant ;
- des mesures de débit (moulinet et venturi) et notamment celle du débit dans la section d'essai ;
- des mesures de pression (manomètres Bourdon et manomètre absolu à piston rotatif) à l'entrée et à la sortie de la section d'essai ;
- des mesures de chute de pression (tubes en U et capsules à potentiomètre) et notamment celle de la différence de pression entre l'entrée et la sortie de la section d'essai ;
- des mesures de la puissance électrique (shunt pour l'intensité, voltmètre pour la tension continue).

## 8.3. PARAMETRES EXPERIMENTAUX

### 8.3.1. Paramètres dimensionnels

Ce sont ceux de la liste établie au chapitre précédent (cf. § 7.1) ou bien des paramètres équivalents.

. Paramètres de géométrie

- La longueur de la zone adiabatique amont introduit deux paramètres dits "longueur externe de freinage"  $L_{of}$  et "longueur externe d'inertie"  $L_{oi}$  exprimés en mètre de longueur de canal chauffant et respectivement équivalents dimensionnels de nos longueurs réduites de frottement  $l_{of}$  et d'inertie  $l_{oi}$  de zone adiabatique amont.

$L_{of}$  est variable de 0,95 m à 13,5 m de canal chauffant.

$L_{oi}$  est pratiquement constant : 0,75 m ou 0,80 m de canal chauffant.

- Les paramètres de géométrie relatifs au canal chauffant sont pratiquement des constantes, sauf la rugosité.

Longueur  $L_c$  : 1,16 ou 1,20 m

Diamètre hydraulique  $D$  :  $5,9 \cdot 10^{-3}$  ou  $6 \cdot 10^{-3}$  m

Tube vertical (inclinaison  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ )

Rugosité variable de  $2 \cdot 10^{-4}$  à  $10^{-3}$ . Ce paramètre remplace notre coefficient de Darcy  $\Lambda$  et permet son calcul grâce à la détermination préliminaire en simple phase de la loi liant ce coefficient au nombre de Reynolds. Dans toute la gamme de nombres de Reynolds correspondant aux seuils étudiés, et pour un nombre de Reynolds donné, le coefficient de Darcy ne varie jamais du fait de la rugosité de plus de  $\pm 0,02$ . Pour le nombre de Reynolds minimum (6.500 environ) le coefficient de Darcy moyen est  $\Lambda = 0,030$ . Pour le nombre de Reynolds maximum ( $10^5$  environ) le coefficient de Darcy moyen est  $\Lambda = 0,020$ .

Compte tenu de l'augmentation souvent importante du coefficient de Darcy lorsqu'on passe d'un écoulement simple phase à un écoulement double phase et puisque le modèle monophasé, dans sa schématisation, ne considère qu'une valeur unique de ce coefficient sur l'ensemble canal chauffant - zone adiabatique aval, nous admettrons que le coefficient de Darcy est une constante :

$$\Lambda = 0,030$$

- La zone adiabatique aval se compose de deux tronçons. Le premier prolonge le canal sans changement de section et sa longueur est, soit 0,20 m, soit 2,44 ou 2,45 m. Le second, de section nettement plus importante (diamètre  $25 \cdot 10^{-3}$  m) a une longueur constante 1,60 m.

Nous avons vu (annexe I) que cette disposition conduisait à définir des longueurs de zone adiabatique aval différentes pour les termes de gravité, frottement et inertie, mais nous avons également vu (§ 6.5.2) que l'introduction de ces trois longueurs équivalentes conduisait, avec les équations du modèle dans leur forme actuelle, à des résultats erronés.

Nous ne sommes donc pas en mesure de définir une longueur de zone adiabatique aval correspondant à l'installation.

Par application des formules (18), (19) et (20) de l'annexe I, on trouve :

• pour les cas dits à "cheminée longue"

$$L_{1g} = 4,04 \text{ ou } 4,05 \text{ m}$$

$$L_{1f} \simeq 2,44 \text{ ou } 2,45 \text{ m (la perte de pression par frottement dans le tronçon de diamètre 25 mm est très faible et compensée par le gain dans l'expansion)}$$

$$L_{1i} = 2,53 \text{ ou } 2,54 \text{ m.}$$

$$\text{On retiendra : } 2,44 \leq L_1 \leq 4,05 \text{ m.}$$

pour les cas dits à "cheminée courte"

$$L_{1g} = 1,80 \text{ m}$$

$$L_{1f} = 0,20 \text{ m}$$

$$L_{1i} = 0,29 \text{ m}$$

$$\text{On retiendra : } 0,20 \leq L_1 \leq 1,80 \text{ m.}$$

. Propriétés physiques

La pression étant maintenue sensiblement constante ( $8 \text{ kgf/cm}^2$ ) pour toute la série d'essais, ces paramètres sont des constantes. On a vu dans l'annexe XII que la masse spécifique est  $R_0 = 897,7 \text{ kg/m}^3$  et que l'enthalpie caractéristique est :

$$H_c = 2,06 \cdot 10^4 \text{ J/kg} = 4,92 \text{ kcal/kg.}$$

La valeur de  $R_0$  peut être considérée comme connue avec précision, mais celle de  $H_c$  est proportionnelle au glissement  $\gamma$  et est par conséquent approximative. Des variations de 30 % autour de cette valeur n'auraient rien d'exceptionnel.

. Accélération de la pesanteur

Elle est évidemment constante  $G = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

. Paramètres de fonctionnement

- La différence de pression entre l'entrée et la sortie  $\Delta P$  remplace dans l'étude expérimentale notre vitesse à l'entrée  $U_{00}$ , ceci pour des raisons pratiques : ce  $\Delta P$  est indépendant des autres paramètres de fonctionnement alors que la vitesse  $U_{00}$  ne l'est pas (en ébullition, elle dépend par exemple de la puissance). Afficher une vitesse  $U_{00}$  aurait par conséquent nécessité de faire un réglage à chaque modification des autres paramètres de fonctionnement.

Au contraire, on a vu que dans l'étude analytique la vitesse  $U_{00}$  est le paramètre logique,  $\Delta P$  disparaissant des équations (§ 2.3.1).

La correspondance entre  $\Delta P$  et  $U_{00}$  n'étant pas biunivoque dans tous les cas, le passage d'un paramétrage à l'autre demande des précautions. Exprimé en mètres d'eau froide  $\Delta P$  a varié de 5,9 m (représentant la hauteur minimale entre piquages du by-pass) à 17,25 m.

La sous-saturation à l'entrée  $\Delta E$  correspond à notre enthalpie à l'entrée -  $H_0$  au signe près.

Toutefois, l'annexe XIII a montré que le phénomène d'ébullition locale introduisait un décalage  $I$  de l'origine des enthalpies,  $H_0$  étant à remplacer par  $H_0 - I$ .

$\Delta E$  a été variée de 1,4 à 90°C, soit de 1,5 à 90 kcal/kg.

- le dernier paramètre de fonctionnement est la densité volumique de puissance  $W$  :

$$15 \text{ W/cm}^3 \leq W \leq 225 \text{ W/cm}^3$$

### 8.3.2. Paramètres adimensionnels

Ce ne sont pas exactement les mêmes que dans le modèle monophasé, ce qui s'explique logiquement par les nécessités expérimentales d'une part, les nécessités de l'étude analytique et numérique du modèle monophasé d'autre part.

. Les grandeurs indépendantes de base sont les mêmes : longueur, masse spécifique, temps.

. Dans le système expérimental, le diamètre a été choisi, un peu arbitrairement, comme unité de longueur, alors qu'il joue un rôle tout à fait secondaire dans le modèle monophasé.

L'unité de masse spécifique est la même dans les deux systèmes : masse spécifique de l'eau juste saturée :  $R_0$ .

L'unité de temps est issue de la même idée. Alors que dans le modèle apparaît  $\frac{1}{c}$  tel que dans la zone chauffante avec effet de densité

$\frac{1}{c} = W \frac{d \frac{1}{R}}{dH}$ , la dérivée est logiquement remplacée dans l'étude expérimentale par le rapport :

$$\frac{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_0}}{H_{1g}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Theta_E} = W \frac{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_0}}{H_{1g}}$$

Sa valeur numérique pour  $P = 8 \text{ kgf/cm}^2$  est un peu différente :

$$\frac{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_o}}{H_{1g}} = \frac{0,2448 - 0,0011}{2,05 \cdot 10^6} = 1,19 \cdot 10^{-7} \text{ MKS}$$

alors que :

$$\frac{d \cdot \frac{1}{R}}{dH} = \frac{1}{H_c R_o} = 0,54 \cdot 10^{-7} \text{ MKS (cf. annexe XII)}$$

Il y a un facteur  $\frac{\Theta_c}{\Theta_E} = 2,2$  entre ces valeurs. La différence provient de l'équation d'état du fluide : dans l'étude expérimentale on introduit le coefficient d'expansion moyen. Dans l'étude analytique, l'introduction de  $\frac{d(1/R)}{dH}$  est plus logique (cf. annexe XII) mais se fait à partir d'une équation d'état idéalisée.

. Enfin, à partir de ces grandeurs de base et des unités correspondantes, les paramètres adimensionnels ont été choisis, dans l'étude expérimentale, compte tenu de la nécessité de représenter simplement les paramètres de fonctionnement. Les groupements logiques sont en effet peu commodes.

Par exemple  $u_{00} = \frac{U_{00} H_c R_o}{W L_c}$  contient la vitesse à l'entrée  $U_{00}$  (dont on a vu ci-dessus qu'elle n'est pas le "bon" paramètre de débit dans l'étude expérimentale) et la densité volumique de puissance  $W$ .

De même  $g = \frac{G (H_c R_o)^2 \sin \varphi}{W^2 L_c}$  est inversement proportionnel au carré de la puissance.

Nous donnons ci-dessous, sous forme de tableau, la correspondance entre les paramètres du modèle et ceux de l'étude expérimentale.

L'établissement des formules de correspondance est immédiat pour les paramètres de géométrie.

Pour les paramètres de fonctionnement on a :

- Sous-saturation à l'entrée

Dans le modèle :

$$s = \frac{H_o - I}{H_c} = \frac{H_o R_o}{H_c R_o} - \frac{I}{H_c}$$

Dans l'étude expérimentale :

$$t_b^+ = H_o R_o \frac{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_o}}{H_{lg}}$$

D'où :

$$s = t_b^+ \frac{\Theta_E}{\Theta_c} - \frac{I}{H_c} \quad (\text{VIII-1})$$

Puissance

Dans le modèle :

$$g = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2}{L_c}$$

Dans l'étude expérimentale :

$$W^+ = W \frac{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_o}}{H_{lg}} \sqrt{\frac{D_c}{G \sin \varphi}} = \frac{1}{\Theta_E} \sqrt{\frac{D_c}{G \sin \varphi}}$$

D'où :

$$g = \left( \frac{\Theta_c}{\Theta_E} \right)^2 \frac{D_c}{L_c} \frac{1}{(W^+)^2} \quad (\text{VIII-2})$$

- Débit

Dans le modèle, le paramètre correspondant est :

$$u_{oo} = \frac{U_{oo} \Theta_c}{L_c}$$

Dans l'étude expérimentale, le paramètre correspondant est la charge piézométrique réduite :

$$h^+ = \frac{N_0 - N}{D_c}$$

où  $N_0$  est la différence de pression entre entrée et sortie exprimée en hauteur d'eau :

$$N_0 = \frac{\Delta P}{R_0 G} = \frac{\Delta p L_c^2}{G \theta_c^2} = \frac{\Delta p \sin \varphi L_c}{g}$$

et où  $N$  est la différence de niveau entre les deux piquages du by-pass.

$N = 5,9$  m ou  $6,42$  m suivant les cas.

D'où :

$$h^+ = \frac{\Delta p L_c \sin \varphi}{g} - \frac{N}{D_c}$$

et

$$\Delta p = \frac{D_c}{L_c} \frac{g}{\sin \varphi} \left( h^+ + \frac{N}{D_c} \right)$$

La relation entre  $\Delta p$  et  $u_{00}$  permet, avec les difficultés déjà signalées, (§ 8.3.1) le passage de  $h^+$  à  $u_{00}$ .

$$\begin{aligned} \Delta p = g \left( 1_0 + u_{00} s + u_{00} k + \frac{1_1}{m} \right) \\ + f \left[ u_{00}^2 (1_0 + 1 + m 1_1) + \frac{u_{00}}{2} (1 - u_{00} s)^2 \right] \text{ (III-3)} \\ + u_{00} (1 - u_{00} s) \end{aligned}$$

En résumé, le tableau de correspondance est le suivant :

Paramètres de géométrie

| Paramètres du modèle monophasé          | Paramètres de l'étude expérimentale  | Formules de correspondance  |
|---|--|---|
| $l_{of}$ (formule VII-1)                | $L_F^+ = \frac{L_F}{D_c}$  | $l_{of} = L_F^+ \frac{D_c}{L_c}$  |
| $l_{oi}$ (formule VII-1)                | $L_I^+ = \frac{L_I}{D_c}$  | $l_{oi} = L_I^+ \frac{D_c}{L_c}$  |
| $l_1 = \frac{L_1}{L_c}$                 | $L^+ = \frac{L_1}{D_c}$  | $l_1 = L^+ \frac{D_c}{L_c}$   |
| $f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D_c}$ | $\left\{ \begin{array}{l} l^+ = \frac{L_c}{D_c} \\ \epsilon \end{array} \right.$ | $\Lambda = \Lambda(\epsilon)$<br>(fonction déterminée expérimentalement)<br>$f = \frac{\Lambda}{2} l^+$ |

Paramètres de fonctionnement

|   |  |  |
|---|--|--|
| $s = \frac{H_o - I}{H_c}$                   | $t_b^+ = H_o R_o \frac{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_o}}{H_{1g}}$                           | $s = \frac{\Theta_E}{\Theta_c} t_b^+ - \frac{I}{H_c}$  |
| $g = \frac{G \sin \varphi \Theta_c^2}{L_c}$ | $W^+ = W \frac{\frac{1}{R_g} - \frac{1}{R_o}}{H_{1g}} \sqrt{\frac{D_c}{G \sin \varphi}}$ | $g = \left(\frac{\Theta_c}{\Theta_E}\right)^2 \frac{D_c}{L_c} \left(\frac{1}{W^+}\right)^2$  |
| $u_{oo} = \frac{U_{oo} \Theta_c}{L_c}$      | $h^+ = \frac{N_o - N}{D_c}$  | $\Delta p = \frac{D_c}{L_c} \frac{g}{\sin \varphi} \left(h^+ + \frac{N}{D_c}\right)$<br>$u_{oo} = u_{oo}(\Delta p)$ par (III-3) et les conditions initiales. |
| Néant                                       | Glissement $\gamma$  | Intervient par l'unité de temps  |

8.4. CONDITIONS ET DIFFICULTES DE LA COMPARAISON8.4.1. Cas expérimentaux

Nous repérerons par les lettres (A), (B), (C), (D) les quatre cas de géométrie étudiés expérimentalement.

- (A) "Cheminée" longue, freinage minimum. Ce cas est repéré dans l'étude expérimentale G11  $\emptyset$  25. Les paramètres de géométrie correspondants sont, d'après le paragraphe précédent :

$$l_{of} = 0,792 \quad l_{oi} = 0,625$$

$$2,03 \leq l_1 \leq 3,37$$

$$f = 3$$

- (B) "Cheminée" longue, freinage moyen G61  $\emptyset$  3,1 :

$$l_{of} = 3,96 \quad l_{oi} = 0,69$$

$$2,11 \leq l_1 \leq 3,49$$

$$f = 3$$

- (C) "Cheminée" longue, freinage maximum G61  $\emptyset$  1,8 :

$$l_{of} = 11,64 \quad l_{oi} = 0,69$$

$$2,11 \leq l_1 \leq 3,49$$

$$f = 3$$

- (D) "Cheminée" courte, freinage minimum G72  $\emptyset$  25 :

$$l_{of} = 0,82 \quad l_{oi} = 0,69$$

$$0,17 \leq l_1 \leq 1,55$$

$$f = 3$$

#### 8.4.2. Difficultés de la comparaison

Elles résultent du fait que le modèle est conçu pour une étude de mécanisme et non pour une étude quantitative. Elles concernent :

- a) La mauvaise définition de  $l_1$  longueur de zone adiabatique aval :
- dans les termes de gravité, la valeur de  $l_1$  est dans chaque cas la borne supérieure,
  - dans les termes de friction de l'inertie, la valeur de  $l_1$  est au contraire proche de la borne inférieure.

Cette difficulté n'est pas trop grave, surtout dans les cas à "cheminée longue", à cause de l'influence relativement faible de  $l_1$ . On retiendra arbitrairement pour la valeur de  $l_1$  une valeur "moyenne" :  $l_1 = 2,5$  pour les cas (A), (B), (C) -  $l_1 = 0,5$  pour le cas (D).

- b) La mauvaise définition de  $f$ , paramètre réduit de friction, que l'on a pris égal à 3. Ici encore, la difficulté n'est pas trop grave, à cause de l'influence relativement faible de  $f$  autour de  $f = 3$ .
- c) La mauvaise définition de l'unité de temps (voir à ce sujet l'annexe XII et le § 8.3.2. A puissance donnée, l'unité de temps retenue pour le modèle est 2,2 fois l'unité de temps de l'étude expérimentale). Cette difficulté n'est pas non plus trop importante, l'unité de temps étant bien définie à un facteur constant près.
- d) La très mauvaise définition du paramètre réduit de sous-saturation  $s$  (voir à ce sujet les annexes XII et XIII). Comme de plus  $s$  est un paramètre dont l'influence est forte, cette difficulté est la plus importante.
- e) Enfin la mauvaise représentation par le modèle des lois de perte de pression, surtout par frottement (adoption d'un coefficient de Darcy  $\Lambda$  constant, alors que le véritable coefficient est fonction de la qualité,

de la puissance volumique et du débit). Cette difficulté ne concerne que la surface (S) qui, dans le modèle, doit être assez différente de la surface réelle.

#### 8.4.3. Méthode de comparaison

Partant des tableaux 5 A et 5 H de la référence [1], on a calculé, pour un certain nombre de points expérimentaux, les valeurs des paramètres adimensionnels du modèle : paramètres de fonctionnement  $u_{00}$ ,  $g$ ,  $s$  et paramètres de fréquence  $\frac{\omega}{2\pi}$  et  $\mu$ .

Ces points sont choisis dans les tableaux par la condition de pression :

$$P = 8 \text{ kgf/cm}^2 \pm 5\% \quad \text{soit} \quad 7,6 \leq P \leq 8,4 \text{ kgf/cm}^2$$

De cette manière, les propriétés physiques varient peu (surtout devant les approximations faites - cf. Annexe XII) et l'échantillonnage n'est faussé par aucune considération particulière.

On constate, conformément aux prévisions du chapitre VI (§ 6.3.4. et 6.3.5) que  $g$  varie très peu :

$$0,06 < g < 0,94 \quad \text{à une exception près (} g = 1,69 \text{)}$$

pour l'ensemble des cas, ce qui, compte tenu de la faible influence de  $g$  dans le modèle (chapitre VI - § 6.5.5), permet de considérer  $g$  comme constant et pratiquement égal à la valeur nominale du chapitre VI :

$$g = 0$$

Comme  $f$  est lui aussi voisin de la valeur nominale :

$$f = 3$$

la base de la comparaison sera le tableau I, établi au chapitre VI. Pour chaque cas, les valeurs de  $l_{of}$ ,  $l_{oi}$ ,  $l_1$ ,  $g$  et  $f$  étant fixées il ne reste comme paramètres que  $u_{00}$  et  $s$ . La comparaison se fait dans le plan ( $s$ ,  $u_{00}$ ) donnant la vitesse réduite  $u_{00}$  au seuil en fonction de la sous-saturation réduite  $s$  (cf. figure 42 du chapitre VI).

8.5. RESULTATS ET DISCUSSIONS

## 8.5.1. Cas (A)

Les résultats sont donnés dans le tableau IV et les figures 45 et 46. Pour ce cas  $l_{of} \approx 0,8$ ,  $l_{oi} \approx 0,6$ ,  $l_1 \approx 2,5$ . Les relevés expérimentaux sont extraits des tableaux 5 A et 5 B de [1]. On note le repère du top, la densité volumique de puissance  $W$ , la vitesse à l'entrée  $U_{00}$ , la sous-saturation à l'entrée  $\Delta E$ , la période  $T$ , la qualité  $x_s$  à la sortie, calculée par le bilan thermique. On note également si le top a été effectué après (R) ou sans (N) redistribution, c'est-à-dire si dans l'évolution expérimentale on a, soit rencontré d'abord la surface (S) entraînant une discontinuité de débit, puis la surface ( $\Sigma$ ) où est situé le seuil, soit rencontré uniquement la surface ( $\Sigma$ ).

On calcule ensuite  $u_{00}$ ,  $g$  et  $s$  à l'aide des relations de définition,  $H_c R_0$  étant pris égal à  $1,85 \cdot 10^7 \text{ J/m}^3$  (annexe XII) et  $L_c$  à 1,20 m.

En ce qui concerne  $s$  qui est très mal défini, on a estimé inutile de passer par l'intermédiaire des enthalpies et on a remplacé  $H_c$  par son équivalent en °C :  $H_c'$  (cf. § 6.3.1) :

$$H_c' \approx 4,7^\circ\text{C}$$

Cette valeur de  $s$  est calculée sans tenir compte de l'ébullition locale. Elle est donc par excès, comme cela a été montré dans l'annexe XIII.

Les relations s'écrivent :

$$u_{00} = \frac{U_{00} (H_c R_0)}{L_c W} = 15,42 \frac{U_{00}}{W} \quad \begin{matrix} (\text{m/s}) \\ (\text{W/cm}^3) \end{matrix}$$

$$g = \frac{G \sin \gamma (H_c R_0)^2}{L_c W^2} = 2,798 \frac{1}{W^2} \quad (\text{W/cm}^3)$$

$$s = \frac{\Delta E}{4,7} \quad (^\circ\text{C})$$

Enfin on calcule :

- la longueur non bouillante réduite  $\lambda_0 = u_{00} s$  (ne tenant pas compte de l'ébullition locale, on obtient parfois des valeurs supérieures à 1) et dans le cas où cela s'avère intéressant, le temps réduit de parcours de la zone chauffante  $(s + k)$  (cf. § 6.6.1) ;
- la fréquence réduite  $\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\Theta_c}{T} = \frac{18,5}{TW}$  avec  $W$  en  $W/cm^3$  et  $T$  en  $s$  et dans les cas où cela s'avère intéressant le paramètre  $\mu$  (cf. § 6.6.2).

Du fait de l'influence stabilisatrice du paramètre  $l_{of}$  et de l'influence déstabilisatrice du paramètre  $l_1$ , le cas (A) pour  $s = 0$  doit être légèrement plus stable que le cas de référence.

On utilise pour s'en rendre compte les figures 38 et 41 du chapitre VI. Ceci rend possible la comparaison directe du cas (A) avec les cas (2), (7), (8), (9), (10) dans le plan  $(s, u_{00})$ .

Cette comparaison est l'objet de la figure 45. Sur cette figure on constate que la plupart des points du tableau IV s'alignent le long d'une courbe d'allure hyperbolique.

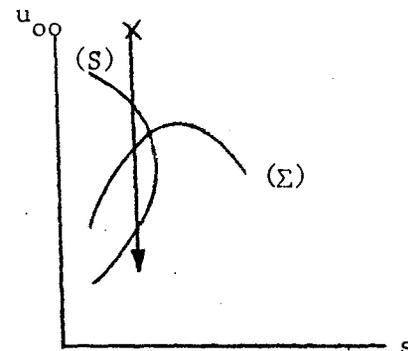
Deux faits sont remarquables :

- a) Les points sont très peu dispersés autour de cette courbe, malgré la mauvaise définition de  $s$  signalée ci-dessus et bien que chaque point corresponde à une valeur de  $g$  différente. Ceci confirme la réalité physique de la faible influence de  $g$ . La dispersion exprimée en  $s$ , des points autour de la courbe moyenne est de  $\pm 1$  et même  $\pm 0,5$  si on excepte les points à très forte valeur de  $s$ . Cette dispersion est compatible avec l'influence qu'a le phénomène d'ébullition locale (cf. annexe XIII).
- b) La courbe expérimentale est pratiquement superposable par une translation à la courbe donnée par le modèle aux conditions nominales. Ici encore l'amplitude de la translation nécessaire pour ramener les points expéri-

mentaux sur la courbe théorique est compatible en grandeur et en signe avec l'influence qu'a l'ébullition locale (translation parallèle à l'axe des  $s$  de moins d'une unité pour certains points et des valeurs modérées de  $s$  à 3,5 unités aux très fortes valeurs de  $s$ ).

Les points non situés près de la courbe moyenne sont :

- Deux points portés sur le diagramme à titre indicatif : un point appartenant au domaine instable et un point "deuxième seuil" où dans l'évolution physique on a retrouvé la stabilité après traversée d'un domaine instable.
- Quatre points où le seuil a été trouvé après une redistribution de débit, c'est-à-dire que dans l'évolution physique on a rencontré d'abord la surface (S). Pour ces points il est alors possible que le seuil observé expérimentalement ne soit pas le bon mais corresponde, soit à une seconde traversée de la surface (S), le point représentatif passant d'un domaine impossible et instable à un domaine possible mais instable (schéma ci-contre), soit à un seuil d'ordre supérieur à 1. L'un de ces quatre points ( $s = 1,32$ ) pourrait d'ailleurs être ramené sur la courbe théorique par la prise en compte du phénomène d'ébullition locale (translation de 0,8 unités parallèle à l'axe des  $s$ ). Ce serait alors le seul point expérimental de cette série à sous-saturation suffisamment faible pour être dans la région où l'influence de  $s$  est déstabilisatrice.
- Un point ( $u_{00} = 0,481$ ,  $s = 2,19$ ) où la forte valeur de  $u_{00}$  observée correspond à une forte valeur de  $g$  ( $g = 1,69$ ), ce qui pourrait expliquer l'écart (cf, figure 34).
- Un point apparemment aberrant ( $u_{00} = 0,220$ ,  $s = 2,49$ ). Compte tenu de la difficulté qu'il y a expérimentalement à repérer les redistributions



de débit, il est possible que ce point ait été précédé d'une redistribution. Il est en effet très proche du point  $u_{00} = 0,222$ ,  $s = 2,57$  pour lequel une telle redistribution a effectivement été observée.

L'examen de la figure 45 s'avère, après cette analyse, très satisfaisant. Comme prévu, du fait de l'ébullition locale, on trouve de nombreux cas où la longueur de la zone sans ébullition franche  $\lambda_0$  est supérieure à l'unité.

On note, comme prévu au paragraphe 6.6.1, que pour les points "normaux", qui sont tous dans la zone où l'influence de  $s$  est stabilisatrice, la valeur de  $\lambda_0$  n'est jamais très inférieure à l'unité (le minimum pour ces points est 0,859, valeur qui serait un peu abaissée par la prise en compte de l'ébullition locale).

Dans ces conditions, le calcul du temps réduit de parcours de la zone chauffante ( $s + k$ ) est inutile.

Nous ne l'avons calculé que pour le point "redistribué" susceptible d'appartenir à la zone où l'influence de  $s$  est stabilisatrice.

On trouve  $(s + k) = 2,53$ , ce qui, même compte tenu de l'ébullition locale, n'est pas incompatible avec la valeur donnée paragraphe 6.6.1 ( $s + k = 2,30 \pm 0,40$ ). La figure 46 donne la fréquence réduite au seuil  $\omega / 2\pi$ , en fonction de  $s$ . La courbe théorique est ici très mal connue (cf. figure 42) pour  $s < 3$  et inconnue (cf. chapitre VI) pour  $s > 3$ .

On ne peut pas dire grand chose, sinon que l'ordre de grandeur est correct.

#### 8.5.2. Cas (B)

Pour ce cas  $l_{of} \simeq 4,0$   $l_{oi} \simeq 0,7$   $l_1 \simeq 2,5$ . Les relevés expérimentaux sont extraits des tableaux 5 C, 5 D, 5 E de [1]. Les résultats sont donnés dans le tableau V et les figures 47 et 48 établies comme dit à propos du cas (A).

$L_c$  est cette fois 1,16 m, ce qui donne :

$$u_{oo} = 15,95 \frac{U_{oo}}{W} \quad \begin{array}{l} \text{(m/s)} \\ \text{(W/cm}^3\text{)} \end{array}$$

$$g = 2\,894 \frac{1}{W^2} \quad \text{(W/cm}^3\text{)}$$

$$s = \frac{\Delta E}{4,7} \quad \text{(^{\circ}C)}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{18,5}{TW} \quad \text{(s, W/cm}^3\text{)}$$

Dans la liste des cas étudiés, il n'y a aucun cas se rapprochant du cas (B). On est seulement sûr que le cas (B) est plus stable que le cas (A) et on le compare de la même façon aux cas (2), (7), (8), (9), (10).

Sur la figure 47, résumant cette comparaison, on peut faire les mêmes remarques que sur la figure 45, relative au cas (A).

L'apparition de la "redistribution" avant les oscillations est beaucoup plus fréquente dans le cas (B) que dans le cas (A), ce qui est logique, le cas (B) étant le plus stable.

La courbe moyenne passant au travers des points tels que  $s > 2$  est entièrement au-dessous de celle du cas (A) pour la même raison, sauf pour de très fortes valeurs de  $s$  ( $s > 13$ ). Pour ces fortes valeurs de  $s$ , non étudiées numériquement dans le modèle, il est possible que l'influence stabilisatrice de  $l_{of}$  soit devenue négligeable.

Les points non situés près de la courbe moyenne sont :

- trois points portés sur le diagramme à titre indicatif ; un point appartenant au domaine instable et deux points "troisième seuil" où dans l'évolution physique on a retrouvé l'oscillation après avoir traversé successivement un domaine instable et un domaine stable ;
- huit points parmi les douze où le seuil a été trouvé après redistribution du débit. Il est d'ailleurs curieux de constater que ces points sont voisins

des "troisièmes seuils" ci-dessus, si bien qu'ils appartiennent peut-être à la nappe de la surface ( $\Sigma$ ) définissant ces "troisièmes seuils" ;

- Deux points apparemment aberrants qui semblent être nettement dans le domaine stable. Ces points correspondent à des valeurs de  $\lambda_0$  anormalement grandes même compte tenu de l'ébullition locale.

Les quatre points restant parmi les points trouvés après redistribution sont situés dans la région à faibles valeurs de  $s$  où l'influence de ce paramètre est déstabilisatrice et définissent dans cette région une courbe moyenne peu éloignée de celle du modèle. Comme dans le cas (A) un point de cette courbe, à valeur relativement forte de  $g$  ( $g = 0,56$ ), possède une forte valeur de  $u_{00}$  ( $u_{00} = 0,399$ ).

On vérifie que pour les points "normaux" situés dans la zone où l'influence de  $s$  est stabilisatrice, la valeur du paramètre  $\lambda_0$  (longueur non bouillante en ébullition franche) n'est jamais très inférieure à l'unité :

$$0,7 < \lambda_0 < 1,25$$

On n'a calculé  $(s + k)$ , temps de parcours réduit de la zone chauffante, que dans le cas où ce paramètre présente de l'intérêt. On trouve qu'effectivement il varie relativement peu  $1,52 \leq s + k \leq 1,92$  (alors que pour ces points  $0,251 \leq u_{00} \leq 0,399$ ) mais on ne peut pas en conclure grand chose étant donné le faible nombre de points correspondants (4) et surtout l'impossibilité de comparer avec le modèle.

Comme dans le cas (A), l'examen de la figure 47 s'avère satisfaisant. La figure 48 donne la fréquence réduite au seuil  $\frac{\omega}{2\pi}$  en fonction de  $s$ . On remarque que les points expérimentaux sont dans la même région que sur la figure 46 (cas (A)), ce qui confirme le fait que  $l_{of}$  n'a pratiquement pas d'influence sur la fréquence (cf. chapitre VI).

### 8.5.3. Cas (C)

Pour ce cas  $l_{of} \approx 11,6$      $l_{oi} \approx 0,7$      $l_1 \approx 2,5$ .

Les relevés expérimentaux sont extraits des tableaux 5 F et 5 G de [1]. Le faible nombre de points nous a amenés à retenir tous les points tels que :

$$P = 8 \text{ kgf/cm}^2 \pm 7,5 \% \text{ soit } 7,4 \leq P \leq 8,6 \text{ kgf/cm}^2$$

(Dans les paragraphes précédents on n'admettait que 5 % d'écart par rapport à la pression de 8 kgf/cm<sup>2</sup>).

Les résultats sont donnés dans le tableau VI et les figures 49 et 50, établis comme précédemment. Les relations utilisées sont les mêmes qu'au paragraphe précédent (8.5.2). La comparaison est de plus en plus hasardeuse. On sait seulement que le cas (C) est plus stable que le cas (B) et on ne peut même pas évaluer l'écart entre ces deux cas, la valeur de  $l_{of}$  ci-dessus étant nettement en dehors de la gamme étudiée au chapitre VI.

Ces réserves étant posées, la figure 49 donnant, en fonction de  $s$ , la valeur des paramètres  $u_{00}$  au seuil a la même allure que dans les autres cas. La courbe moyenne est entièrement en-dessous de celle du cas (B) et on note une atténuation de l'influence de  $s$ . Aux fortes valeurs de  $s$  ( $s > 13$ ), la tendance notée à propos du cas (B) se confirme et l'influence stabilisatrice de  $l_{of}$  est devenue négligeable. Dans de nombreux cas, on n'a pu repérer expérimentalement s'il y avait eu ou non redistribution avant le seuil. Seuls les points où cette redistribution est certaine sont éloignés de la courbe moyenne.

Il n'y a pas de points expérimentaux dans la région à faibles valeurs de  $s$ . Dans la région à fortes valeurs de  $s$  ( $s \geq 3,85$ ) on note des valeurs de  $\lambda_0$  (longueur non bouillante réduite) plus faibles que dans les cas précédents :

$$0,33 < \lambda_0 < 0,97$$

La figure 50 donne la fréquence réduite au seuil  $\frac{\omega}{2\pi}$  en fonction de  $s$ . Les points sont dans la même région que pour les cas (A) et (B). Même lorsqu'il est très grand  $l_{of}$  a sur la fréquence au seuil une influence négligeable.

## 8.5.4. Cas (D)

Pour ce cas  $l_{of} \approx 0,8$   $l_{oi} \approx 0,7$   $l_1 \approx 0,5$

Les relevés expérimentaux sont extraits du tableau 5 H de [1].

Les relations utilisées sont les mêmes que pour les cas (B) et (C) (cf. § 8.5.2).

Du fait de l'influence stabilisatrice du paramètre  $l_{of}$  et de l'influence déstabilisatrice au paramètre  $l_1$ , le cas (D) pour  $s = 0$  doit être plus stable que le cas de référence. Comme ci-dessus, on compare directement le cas (D) avec les cas (2), (7), (8), (9) et (10) dans le plan  $(s, u_{00})$ .

Les résultats sont donnés dans le tableau VII et les figures 51 et 52. Par ailleurs, le cas (D) doit être plus stable que le cas (A) (influence déstabilisatrice du paramètre  $l_1$ ).

La figure 51, donnant en fonction de  $s$  la valeur du paramètre  $u_{00}$  au seuil, montre qu'il en est bien ainsi. De même que, dans les cas précédents, l'influence stabilisatrice de  $l_{of}$  s'atténue lorsque  $s$  atteint des valeurs de l'ordre de 10.

Pour ce cas (D) il n'y a pas de points expérimentaux dans la région à faibles valeurs de  $s$ . Dans la région à fortes valeurs de  $s$  ( $s > 2,2$ ) on note des valeurs de  $\lambda_0$  (longueur non bouillante réduite) plus faibles que dans le cas (A):

$$0,35 < \lambda_0 < 0,84$$

La figure 52 donnant, en fonction de  $s$  la valeur de la fréquence réduite  $\frac{\omega}{2\pi}$  au seuil, montre que les points sont dans la même région que pour les autres cas expérimentaux. La valeur du paramètre  $l_1$  a sur cette fréquence au seuil une influence faible.

## 8.6. CONCLUSION

8.6.1. La comparaison quantitative du modèle avec les résultats de l'étude expérimentale [1] a mis en évidence un accord excellent qui permet d'envisager, dépassant le but initial de cette étude, l'utilisation quantitative du modèle monophasé. C'est la figure 45 qui met le mieux en évidence cet accord. Encore faut-il noter que les bases de comparaison dans le modèle et dans la réalité sont des cas géométriquement voisins, mais non identiques (une analyse plus détaillée, dépassant le cadre de cette étude parce que nécessitant un volume important de calculs numériques, serait intéressante).

8.6.2. La principale difficulté qu'il faut s'attendre à rencontrer dans l'utilisation numérique du modèle est celle de la définition du paramètre réduit de sous-saturation  $s$ . Comme prévu (cf. annexe XIII) ce paramètre est en effet grandement affecté par le phénomène d'ébullition locale. Ce phénomène diminue la valeur réelle de  $s$  d'une quantité qui dépend malheureusement des autres paramètres de fonctionnement.

8.6.3. De même, et comme cela était prévisible, la surface ( $S$ ) utilisée ici, limitant les domaines de fonctionnement possible et impossible, n'est pas réaliste. Ceci n'est pas une difficulté bien importante. On dispose en général de corrélations empiriques de pertes de pression qui permettent un tracé plus approché de la surface ( $S$ ) réelle.

8.6.4. Le bon accord du modèle avec l'expérience permet de mettre en évidence des lacunes dans l'étude expérimentale [1]. On ne possède en effet que quelques points correspondants à des sous-saturations réduites  $s$  inférieures à 3, ces sous-saturations étant très difficiles à atteindre expérimentalement à basse pression. Comme c'est précisément dans cette plage de valeurs que l'effet de la sous-saturation  $s$  inverse (cf. chapitre VII), cette inversion est passée inaperçue dans l'étude [1] alors qu'elle est citée dans la bibliographie. De plus, à haute pression, les

valeurs réalistes des sous-saturations réduites sont dans cette gamme non étudiées expérimentalement. Bien que les résultats de [1] soient donnés de manière adimensionnelle, ceci rend impossible les prévisions à haute pression à partir de ces résultats.

8.6.5. De même cet accord permet de mettre en évidence des faits nouveaux qui n'ont été cités ni dans [1], ni dans les chapitres précédents, comme par exemple l'atténuation de l'influence du paramètre  $s$  pour de fortes valeurs du paramètre  $l_{of}$  ou réciproquement la quasi disparition de l'influence stabilisatrice du paramètre  $l_{of}$  aux fortes sous-saturations.

8.6.6. La comparaison, dans ces deux derniers chapitres, du modèle avec l'expérience s'est avérée particulièrement fructueuse.

Ayant maintenant acquis une "assurance raisonnable" (cf. § 2.3.4) sur la validité du modèle, il est intéressant, avant de conclure, d'une part de préciser les idées du chapitre II sur le mécanisme du phénomène d'oscillations, d'autre part d'étudier les possibilités d'utilisation pratique du modèle monophasé.

Ce sera l'objet des deux chapitres suivants.

TABLEAU IV

Valeurs des paramètres du modèle pour les points expérimentaux (1) / Cas (A).

| Relevés Expérimentaux |                        |                        |          |        |                            |                 |       |      |                       |       |   |      |                            |                                 | Observations |
|-----------------------|------------------------|------------------------|----------|--------|----------------------------|-----------------|-------|------|-----------------------|-------|---|------|----------------------------|---------------------------------|--------------|
| Top                   | W<br>W/cm <sup>3</sup> | U <sub>∞∞</sub><br>m/s | ΔE<br>°C | T<br>s | (2)<br>x <sub>s</sub><br>% | u <sub>∞∞</sub> | g     | s    | (2)<br>λ <sub>o</sub> | s + k | Fréquence<br>réduite<br>$\frac{\omega}{2\pi}$ | μ    | Redistribu-<br>tion<br>(3) |                                 |              |
| 3T2                   | 86,5                   | 1,52                   | 6,2      | 2,6    | 2,4                        | 0,271           | 0,374 | 1,32 | 0,358                 | 2,53  | 0,082   | 0,43 | R                          |                                 |              |
| 4T9                   | 126,3                  | 1,32                   | 31,7     | 10     | - 0,4                      | 0,161           | 0,175 | 6,75 | 1,09                  | -     | 0,015   | -    | N                          |                                 |              |
| 6T1                   | 62,8                   | 1,22                   | 15,6     | 5      | 0,2                        | 0,300           | 0,710 | 3,32 | 0,996                 | -     | 0,059   | -    | N                          |                                 |              |
| 6T5                   | 105,1                  | 1,10                   | 30,7     | 8,6    | - 0,25                     | 0,161           | 0,254 | 6,53 | 1,05                  | -     | 0,020   | -    | N                          |                                 |              |
| 7T1                   | 156,2                  | 1,38                   | 38,4     | 4,8    | - 0,7                      | 0,136           | 0,115 | 8,17 | 1,11                  | -     | 0,025   | -    | N                          |                                 |              |
| 8T4                   | 95,1                   | 1,39                   | 22,9     | 6,5    | - 0,2                      | 0,225           | 0,310 | 4,87 | 1,10                  | -     | 0,030   | -    | N                          |                                 |              |
| 8T8                   | 151,7                  | 1,52                   | 33,7     | 8,8    | - 0,5                      | 0,155           | 0,122 | 7,16 | 1,11                  | -     | 0,014   | -    | N                          |                                 |              |
| 9T4                   | 155,9                  | 2,05                   | 26,3     | 6,3    | - 0,4                      | 0,203           | 0,115 | 5,60 | 1,14                  | -     | 0,019   | -    | N                          |                                 |              |
| 10T2                  | 40,7                   | 1,27                   | 10,3     | 5,2    | 0,1                        | 0,481           | 1,690 | 2,19 | 1,05                  | -     | 0,087   | -    | N                          |                                 |              |
| 12T3                  | 69,5                   | 0,99                   | 11,7     | 6,2    | 2,0                        | 0,220           | 0,580 | 2,49 | 0,548                 | -     | 0,043   | -    | N                          |                                 |              |
| 10T3                  | 99,0                   | 1,93                   | 11,2     | -      | 1,1                        | 0,301           | 0,286 | 2,38 | 0,716                 | -     | -   | -    | R                          |                                 |              |
| 10T4                  | 187,4                  | 2,18                   | 21,4     | -      | 1,9                        | 0,179           | 0,080 | 4,55 | 0,815                 | -     | -   | -    | R                          | Point du domaine ins-<br>table. |              |
| 15T3                  | 147,3                  | 3,09                   | 18,2     | 2,6    | - 0,3                      | 0,323           | 0,129 | 3,87 | 1,25                  | -     | 0,048   | -    | N                          |                                 |              |
| 15T5                  | 189,1                  | 3,04                   | 23,7     | 1,7    | - 0,6                      | 0,248           | 0,078 | 5,04 | 1,25                  | -     | 0,058   | -    | N                          |                                 |              |
| 16T1                  | 102,7                  | 1,48                   | 12,1     | -      | 2,2                        | 0,222           | 0,266 | 2,57 | 0,570                 | -     | -   | -    | R                          |                                 |              |
| 16T2                  | 82,5                   | 1,11                   | 12,5     | 2,3    | 2,4                        | 0,208           | 0,412 | 2,66 | 0,554                 | -     | 0,097   | -    | R                          |                                 |              |
| 16T4                  | 123,8                  | 1,89                   | 21,0     | 2      | 0                          | 0,235           | 0,183 | 4,47 | 1,05                  | -     | 0,075   | -    | N                          |                                 |              |
| 16T5                  | 125,2                  | 1,89                   | 22,1     | -      | - 0,2                      | 0,233           | 0,179 | 4,70 | 1,10                  | -     | -   | -    | N                          |                                 |              |
| 17T3                  | 102,9                  | 2,33                   | 16,2     | 2,7    | - 0,3                      | 0,349           | 0,265 | 3,45 | 1,20                  | -     | 0,067   | -    | N                          |                                 |              |
| 18T2                  | 125,2                  | 2,30                   | 19,9     | 2,7    | - 0,4                      | 0,283           | 0,179 | 4,24 | 1,20                  | -     | 0,055   | -    | N                          |                                 |              |
| 18T4                  | 157,3                  | 2,34                   | 24,8     | 2,1    | - 0,6                      | 0,229           | 0,113 | 5,28 | 1,21                  | -     | 0,056   | -    | N                          |                                 |              |
| 18T8                  | 110,9                  | 2,31                   | 17,3     | 2,3    | - 0,3                      | 0,321           | 0,228 | 3,68 | 1,18                  | -     | 0,073   | -    | N                          |                                 |              |
| 19T3                  | 79,9                   | 1,35                   | 19,0     | 11     | 0                          | 0,261           | 0,439 | 4,04 | 1,05                  | -     | 0,021   | -    | N                          |                                 |              |
| 19T5                  | 109,1                  | 1,42                   | 27,2     | 3,3    | - 0,6                      | 0,201           | 0,235 | 5,79 | 1,16                  | -     | 0,051   | -    | N                          |                                 |              |
| 11T5                  | 94,6                   | 1,02                   | 18,2     | 15     | 1,6                        | 0,166           | 0,314 | 3,87 | 0,642                 | -     | 0,013   | 0,13 | N                          | 2ème seuil                      |              |
| 12T4                  | 95,0                   | 0,75                   | 37,1     | 6,7    | 0                          | 0,122           | 0,311 | 7,89 | 0,963                 | -     | 0,029   | -    | N                          |                                 |              |
| 13P1                  | 85,7                   | 0,42                   | 60,2     | 7,8    | - 1,7                      | 0,076           | 0,381 | 12,8 | 0,973                 | -     | 0,028   | -    | N                          |                                 |              |
| 13P2                  | 89,1                   | 0,49                   | 59,4     | -      | - 2,4                      | 0,085           | 0,353 | 12,6 | 1,07                  | -     | -   | -    | N                          |                                 |              |
| 13P4                  | 82,0                   | 0,38                   | 62,5     | 8,8    | - 1,5                      | 0,071           | 0,417 | 13,3 | 0,945                 | -     | 0,026   | -    | N                          |                                 |              |
| 14T4                  | 54,5                   | 0,26                   | 54,6     | 9,5    | - 1,2                      | 0,074           | 0,942 | 11,6 | 0,859                 | -     | 0,036   | -    | N                          |                                 |              |

(1) Extraits des tableaux 5A et 5B de la référence [1]

(2) Calculés sans tenir compte de l'ébullition locale

(3) R : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré la surface (S) avant le seuil d'oscillation  
N : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré uniquement le seuil d'oscillation.

TABLEAU V

Valeurs des paramètres du modèle pour les points expérimentaux (1). Cas (B).

| Relevés expérimentaux |                        |                       |          |        |                         |                |       |      |                       |         |   |      |                         | Observations                 |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|----------|--------|-------------------------|----------------|-------|------|-----------------------|---------|---|------|-------------------------|------------------------------|
| Top                   | W<br>W/cm <sup>3</sup> | U <sub>∞</sub><br>m/s | ΔE<br>°C | T<br>s | x <sub>s</sub> (2)<br>% | u <sub>∞</sub> | g     | s    | (2)<br>λ <sub>0</sub> | (s + k) | Fréquence<br>réduite<br>$\frac{\omega}{2\pi}$ | μ    | Redistri-<br>bution (3) |                              |
| 3P4                   | 142,8                  | 1,14                  | 11,7     | 1,9    | 5,6                     | 0,127          | 0,142 | 2,49 | 0,316                 | -       | 0,068   | -    | R                       |                              |
| 3T3                   | 142,8                  | 1,32                  | 11,0     | 1,8    | 4,7                     | 0,147          | 0,142 | 2,34 | 0,344                 | -       | 0,072   | -    | R                       |                              |
| 3T6                   | 147,0                  | 1,22                  | 14,1     | 2      | 4,8                     | 0,132          | 0,134 | 3,00 | 0,396                 | -       | 0,063   | -    | R                       |                              |
| 6P8                   | 174,3                  | 1,18                  | 20,8     | 2,75   | 4,9                     | 0,108          | 0,095 | 4,43 | 0,478                 | -       | 0,039   | -    | R                       |                              |
| 4T4                   | 103,5                  | 1,69                  | 1,4      | 0,8    | 3,8                     | 0,261          | 0,271 | 0,30 | 0,078                 | 1,81    | 0,224   | 0,88 | R                       |                              |
| 4T6                   | 106,8                  | 1,68                  | 1,9      | 1,05   | 3,8                     | 0,251          | 0,254 | 0,40 | 0,100                 | 1,92    | 0,165   | 0,67 | R                       |                              |
| 4T7                   | 91,1                   | 1,83                  | 1,7      | 2,5    | 3,1                     | 0,320          | 0,350 | 0,36 | 0,115                 | 1,69    | 0,081   | 0,31 | R                       |                              |
| 2P5                   | 172,0                  | 1,21                  | 11,7     | 2,1    | 6,6                     | 0,112          | 0,098 | 2,49 | 0,279                 | -       | 0,051   | -    | R                       |                              |
| 2T6                   | 169,0                  | 1,20                  | 18,8     | -      | 5,0                     | 0,113          | 0,102 | 4,00 | 0,452                 | -       | -   | -    | R                       |                              |
| 2T3                   | 170,0                  | 1,29                  | 17,9     | -      | 4,7                     | 0,121          | 0,100 | 3,81 | 0,461                 | -       | -   | -    | R                       |                              |
| 8T4                   | 100,0                  | 1,00                  | 9,9      | -      | 4,4                     | 0,160          | 0,289 | 2,11 | 0,338                 | -       | -   | -    | R                       |                              |
| 9T2                   | 72,0                   | 1,80                  | 1,8      | 1,2    | 2,2                     | 0,399          | 0,560 | 0,38 | 0,152                 | 1,52    | 0,214   | 0,76 | R                       |                              |
| 10T4                  | 216,6                  | 1,61                  | 37,4     | 6,5    | 0,6                     | 0,118          | 0,062 | 7,96 | 0,940                 | -       | 0,013   | -    | N                       |                              |
| 13T1                  | 104,5                  | 0,94                  | 9,9      | 2,3    | 4,8                     | 0,144          | 0,266 | 2,11 | 0,304                 | -       | 0,077   | -    | ?                       | Point du domaine<br>installé |
| 15T1                  | 144,1                  | 1,12                  | 34,4     | 6      | 0,8                     | 0,124          | 0,140 | 7,32 | 0,908                 | -       | 0,021   | -    | N                       |                              |
| 3P4N                  | 103,1                  | 0,78                  | 20,0     | 2,8    | 4,1                     | 0,121          | 0,273 | 4,25 | 0,514                 | -       | 0,064   | -    | N                       | 3ème seuil                   |
| 3T5N                  | 97,5                   | 1,23                  | 30,8     | -      | - 1,8                   | 0,201          | 0,305 | 6,55 | 1,32                  | -       | -   | -    | N                       |                              |
| 3T9N                  | 97,5                   | 1,21                  | 33,8     | -      | - 2,3                   | 0,198          | 0,305 | 7,19 | 1,42                  | -       | -   | -    | N                       |                              |
| 4P1N                  | 92,5                   | 0,91                  | 24,4     | -      | 0,7                     | 0,157          | 0,339 | 5,19 | 0,815                 | -       | -   | -    | N                       |                              |
| 4P4N                  | 91,8                   | 0,91                  | 24,4     | -      | 0,6                     | 0,158          | 0,344 | 5,19 | 0,820                 | -       | -   | -    | N                       |                              |
| 4P5N                  | 94,3                   | 0,91                  | 25,4     | 5,9    | 0,3                     | 0,154          | 0,326 | 5,40 | 0,832                 | -       | 0,033   | -    | N                       |                              |
| 4P16                  | 95,3                   | 0,65                  | 19,6     | -      | 4,3                     | 0,109          | 0,320 | 4,17 | 0,455                 | -       | -   | -    | N                       | 3ème seuil                   |
| 8P7                   | 84,6                   | 0,48                  | 65,2     | 7,6    | 1,2                     | 0,090          | 0,405 | 13,9 | 1,25                  | -       | 0,029   | -    | N                       |                              |
| 8P8                   | 83,4                   | 0,36                  | 65,9     | -      | - 1,1                   | 0,067          | 0,398 | 14,0 | 0,939                 | -       | -   | -    | N                       |                              |
| 8T5                   | 85,0                   | 0,22                  | 78,7     | -      | 5,3                     | 0,042          | 0,421 | 16,7 | 0,702                 | -       | -   | -    | N                       |                              |
| 9T4                   | 98,0                   | 1,17                  | 20,1     | -      | 1,2                     | 0,190          | 0,302 | 4,28 | 0,813                 | -       | -   | -    | N                       |                              |

(1) Extraits des tableaux 5C à 5E de la référence [1]

(2) Calculés sans tenir compte de l'ébullition locale

(3) R : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré la surface (S) avant le seuil d'oscillation

N : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré uniquement le seuil d'oscillation.

TABLEAU VI

Valeurs des paramètres du modèle pour les points expérimentaux (1). Cas ©

| Relevés expérimentaux |                          |                       |          |        |                                    |                |       |      |                               |       |   |      |                             |                           |
|-----------------------|--------------------------|-----------------------|----------|--------|------------------------------------|----------------|-------|------|-------------------------------|-------|---|------|-----------------------------|---------------------------|
| Top                   | W<br>W / cm <sup>3</sup> | U <sup>∞</sup><br>m/s | ΔE<br>°C | T<br>s | x <sub>s</sub> <sup>(2)</sup><br>% | u <sub>∞</sub> | g     | s    | λ <sub>o</sub> <sup>(2)</sup> | (s+k) | Fréquence<br>réduite<br>$\frac{\omega}{2\pi}$ | μ    | (3)<br>Redistri-<br>bution. | Observations              |
| S4T6                  | 96,4                     | 0,52                  | 18,1     | 3,6    | 6                                  | 0,086          | 0,312 | 3,85 | 0,331                         | -     | 0,053   | -    | N                           | -                         |
| 2T2                   | 168,0                    | 0,85                  | 22,1     | -      | 7,7                                | 0,081          | 0,103 | 4,70 | 0,381                         | -     | -   | -    | -                           | Point du domaine stable   |
| 2T3                   | 173,0                    | 0,75                  | 6,4      | 1,16   | 14,2                               | 0,069          | 0,097 | 1,36 | 0,094                         | 4,01  | 0,092   | 0,61 | R                           | -                         |
| 2P4                   | 176,0                    | 0,72                  | 7,1      | -      | 15,2                               | 0,065          | 0,094 | 1,51 | 0,098                         | -     | -   | -    | R                           | Point du domaine instable |
| 2T4                   | 175,0                    | 0,68                  | 6,5      | 1,2    | 15,9                               | 0,062          | 0,095 | 1,38 | 0,086                         | 4,14  | 0,088   | 0,59 | R                           | -                         |
| 3T2                   | 215,5                    | 0,83                  | 58,5     | 2,4    | 10,5                               | 0,061          | 0,062 | 12,5 | 0,763                         | -     | 0,036   | -    | -                           | -                         |
| 4P1                   | 171,7                    | 0,73                  | 27,7     | 2,9    | 9,2                                | 0,068          | 0,099 | 5,90 | 0,401                         | -     | 0,037   | -    | -                           | -                         |
| 5T6                   | 138,5                    | 0,83                  | 22,3     | -      | 5,2                                | 0,096          | 0,151 | 4,75 | 0,456                         | -     | -   | -    | -                           | -                         |
| 6T2                   | 145,6                    | 0,66                  | 30,4     | 3,6    | 7,79                               | 0,072          | 0,137 | 6,46 | 0,465                         | -     | 0,035   | -    | -                           | Point du domaine instable |
| 6T4                   | 138,0                    | 0,71                  | 34,9     | 4      | 4,6                                | 0,082          | 0,152 | 7,43 | 0,609                         | -     | 0,034   | -    | -                           | -                         |
| 9T1                   | 155,0                    | 0,61                  | 72,0     | 7      | 0                                  | 0,063          | 0,121 | 15,3 | 0,964                         | -     | 0,017   | -    | N                           | -                         |
| 9T2                   | 168,0                    | 0,63                  | 71,5     | 6,6    | 1,6                                | 0,060          | 0,103 | 15,2 | 0,912                         | -     | 0,017   | -    | N                           | Point du domaine instable |
| 9T4                   | 192,0                    | 0,63                  | 87,6     | 6      | - 0,4                              | 0,052          | 0,079 | 18,6 | 0,967                         | -     | 0,016   | -    | N                           | -                         |

(1) Extraits des tableaux 5F et 5G de la référence [1]

(2) calculés sans tenir compte de l'ébullition locale

(3) R : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré la surface (S) avant le seuil d'oscillation

N : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré uniquement le seuil d'oscillation

- : On ne sait pas s'il y a eu, ou non, redistribution avant le seuil.

**TABLÉAU VII**

Valeurs des paramètres pour les points expérimentaux (1). Cas **(D)**.

| Relevés expérimentaux |                        |                       |           |        |                                    |                |       |      |                       |         |   |   |                            |                           |
|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------|--------|------------------------------------|----------------|-------|------|-----------------------|---------|---|---|----------------------------|---------------------------|
| Top                   | W<br>W/cm <sup>3</sup> | U <sub>∞</sub><br>m/s | Δ E<br>°C | T<br>s | x <sub>s</sub> <sup>(2)</sup><br>% | u <sub>∞</sub> | g     | s    | (2)<br>λ <sub>o</sub> | (s + k) | Fréquence<br>réduite<br>$\frac{\omega}{2\pi}$ | μ | Redistri-<br>bution<br>(3) | Observations              |
| 2T2                   | 199,7                  | 1,4                   | 29,4      | 2,5    | 14,3                               | 0,112          | 0,073 | 6,25 | 0,700                 | -       | 0,037   | - | R                          | Point du domaine instable |
| 2T5                   | 202,0                  | 1,2                   | 29,5      | 2,5    | 4,2                                | 0,095          | 0,071 | 6,28 | 0,596                 | -       | 0,037   | - | R                          |                           |
| 3T1                   | 146,0                  | 1,9                   | 22,6      | -      | 0,3                                | 0,208          | 0,136 | 4,81 | 1,00                  | -       | -   | - | -                          | Point du domaine stable   |
| 3T2                   | 144,6                  | 1,0                   | 16,4      | 1,75   | 7,5                                | 0,110          | 0,139 | 3,49 | 0,384                 | -       | 0,073   | - | N                          | Point du domaine instable |
| 5T3                   | 148,0                  | 1,5                   | 29,1      | -      | 0                                  | 0,162          | 0,133 | 6,19 | 1,00                  | -       | -   | - | -                          | Point du domaine stable   |
| 6T2                   | 164,0                  | 0,9                   | 24,4      | 2,3    | 6,7                                | 0,088          | 0,108 | 5,19 | 0,456                 | -       | 0,049   | - | N                          |                           |
| 6T3                   | 202,1                  | 1,3                   | 38,5      | 3,2    | 13,8                               | 0,103          | 0,071 | 8,19 | 0,844                 | -       | 0,029   | - | N                          |                           |
| 7T1                   | 215,0                  | 2,5                   | 26,3      | -      | 0                                  | 0,186          | 0,063 | 5,60 | 1,04                  | -       | -   | - | -                          | Point du domaine stable   |
| 8T5                   | 116,0                  | 1,0                   | 15,6      | 1,7    | 4,1                                | 0,137          | 0,216 | 3,32 | 0,455                 | -       | 0,094   | - | N                          |                           |
| 8T6                   | 159,0                  | 1,3                   | 13,3      | 1,3    | 5,4                                | 0,130          | 0,115 | 2,83 | 0,368                 | -       | 0,090   | - | N                          |                           |
| 8T2                   | 101,1                  | 1,1                   | 13,9      | -      | 2,8                                | 0,174          | 0,284 | 2,96 | 0,515                 | -       | -   | - | -                          | Point du domaine stable   |
| 10T1                  | 224,0                  | 3,4                   | 21,8      | -      | 0                                  | 0,242          | 0,058 | 4,64 | 1,12                  | -       | -   | - | N                          | Point du domaine stable   |
| 11T2                  | 209,0                  | 1,5                   | 16,8      | 1,35   | 5,4                                | 0,114          | 0,066 | 3,58 | 0,418                 | -       | 0,066   | - | N                          |                           |
| 11T3                  | 217,0                  | 1,5                   | 17,1      | 1,30   | 6,2                                | 0,110          | 0,062 | 3,64 | 0,400                 | -       | 0,066   | - | N                          |                           |
| 12T3                  | 154,2                  | 1,6                   | 10,5      | 0,9    | 4,3                                | 0,166          | 0,122 | 2,23 | 0,370                 | -       | 0,133   | - | N                          |                           |
| 12T5                  | 194,0                  | 1,5                   | 13,4      | 1,15   | 5,8                                | 0,123          | 0,077 | 2,85 | 0,350                 | -       | 0,083   | - | N                          |                           |
| 12T4                  | 187,6                  | 1,9                   | 11,7      | 1,1    | 4,2                                | 0,162          | 0,083 | 2,49 | 0,404                 | -       | 0,090   | - | N                          | Point du domaine instable |

(1) Extraits du tableau 5H de la référence [1]

(2) Calculés sans tenir compte de l'ébullition locale

(3) R : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré la surface (S) avant le seuil d'oscillation

N : Dans l'évolution expérimentale, on a rencontré uniquement le seuil d'oscillation

- : On ne sait pas s'il y a, ou non, redistribution avant le seuil.

## CHAPITRE IX

### RETOUR SUR LES TERMES MOTEURS

#### 9.1. INTRODUCTION

Nous avons montré au cours du second chapitre sur les équations générales (non linéarisées) que, dans le modèle monophasé, la cause d'éventuelles oscillations ne pouvait être que ce que nous avons appelé l'"effet de densité". Cet effet de densité est dû à la loi reliant la masse spécifique du fluide à l'enthalpie.

Partant d'une petite perturbation telle qu'il en existe pratiquement toujours dans tout circuit hydraulique, il est susceptible d'entretenir le phénomène d'oscillation grâce au déphasage existant entre une variation de vitesse à l'entrée et la variation correspondante de la masse spécifique en aval.

Plus exactement, cet "effet de densité" (que l'on pourrait aussi bien appeler "effet de retard") intervient par ses effets intégrés sur la masse, l'abscisse de centre de masse et le moment d'inertie de la masse. Les termes correspondants de l'équation de la dynamique sont susceptibles d'être moteurs pendant certains intervalles de temps et si l'énergie fournie par ces termes moteurs est suffisante pour compenser l'énergie absorbée par les termes d'amortissement, l'oscillation est entretenue suivant le mécanisme détaillé au paragraphe 2.3.3.

Notre connaissance du mécanisme a été précisée par la suite : au cours du chapitre V nous avons montré que les déphasages résultant de

l'"effet de densité" étaient, d'une part des retards liés au temps de parcours des différentes zones (zone adiabatique amont exclue) par une particule fluide, d'autre part des déphasages proprement dits, variables avec la fréquence de l'oscillation éventuelle.

Ces retards et ces déphasages sont nombreux et dévoilent la complexité pratique du mécanisme, malgré la simplicité de son principe. Dans le cas général, on compte cinq retards et neuf déphasages. Dans le cas le plus simple, où il n'y a, ni zones adiabatiques, ni sous-saturation à l'entrée, il subsiste un retard et cinq déphasages. Cette complexité explique les difficultés rencontrées dans les études expérimentales et théoriques du phénomène.

Au cours des chapitres VI, VII et VIII, nous avons constaté que le système représenté par le modèle pouvait effectivement avoir un comportement oscillant et que, ce comportement étant très voisin du comportement des systèmes réels comparables, le mécanisme ci-dessus devait être considéré comme la cause de ce comportement. (On ne peut pas avancer avec certitude qu'il n'existe pas d'autres mécanismes susceptibles de causer également des oscillations, on peut notamment concevoir des mécanismes expliquant des oscillations de relaxation. Cependant, les chapitres précédents ont montré que dans les cas usuels le mécanisme à "effet de densité" avait toutes chances d'être le plus courant).

Ceci étant acquis, nous allons rechercher des renseignements supplémentaires sur les termes moteurs à partir de l'énergie mise en jeu par chacun d'eux pendant une période. Comme au début du chapitre II, nous raisonnerons sur le cas le plus simple où le système ne comporte ni zones adiabatiques, ni sous-saturation à l'entrée.

Cas (1)

$$l_0 = l_1 = s = 0$$

## 9.2. TRAVAIL DES FORCES EXTERIEURES

### 9.2.1. Forces extérieures

Une particule occupant à l'instant  $t$  l'unité de section sur une longueur  $dz$  à l'abscisse  $z$  est soumise aux trois forces suivantes :

- . pesanteur  $- \rho g dz$
- . frottement  $- \rho f u^2 dz$
- . charge motrice  $- \frac{\partial p}{\partial z} dz$

Leur résultante s'exprime plus commodément en utilisant l'équation fondamentale de la dynamique (par exemple : I-14). Elle est :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \right) dz$$

Or  $u(z,t) = u_0(t) + z = u_{00} + v(t) + z$  (formules I-19' et II-2) et  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$ .

L'équation (II-4) reliant  $\frac{dv}{dt}$  aux paramètres du modèle et aux fonctions  $\xi, \eta, \zeta$  permet d'obtenir finalement la résultante des forces extérieures sous la forme :

$$- \rho \left[ fv (2 u_{00} + v) + 2 fv \frac{\eta}{\xi} + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \frac{\xi - \xi_0}{\xi} + (1 + 2 f u_{00}) \frac{\eta - \eta_0}{\xi} + f \frac{\zeta - \zeta_0}{\xi} - u_{00} - z \right] dz$$

### 9.2.2. Puissance fournie par les forces extérieures

- Pour la particule considérée, la puissance est le produit de la résultante des forces par la vitesse :

$$- \rho \left[ f v (2 u_{00} + v) + 2 f v \frac{\eta}{\xi} + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \frac{\xi - \xi_0}{\xi} + (1 + 2 f u_{00}) \frac{\eta - \eta_0}{\xi} \right. \\ \left. + f \frac{\xi - \xi_0}{\xi} - u_{00} - z \right] [u_{00} + v + z] dz$$

- Pour l'ensemble du canal, la puissance est donnée par la sommation de cette expression entre  $z = 0$  et  $z = 1$  à l'instant considéré :

$$- \left[ f v (2 u_{00} + v) + 2 f v \frac{\eta}{\xi} + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \frac{\xi - \xi_0}{\xi} + (1 + 2 f u_{00}) \frac{\eta - \eta_0}{\xi} \right. \\ \left. + f \frac{\xi - \xi_0}{\xi} - u_{00} \right] [(u_{00} + v) \xi + \eta] + (u_{00} + v) \eta + \zeta$$

- Pour obtenir la puissance mise en jeu par la perturbation elle-même, nous soustrairons de cette puissance totale la puissance nécessaire à l'entretien du régime permanent (puissance fournie par la charge motrice constante). En régime permanent  $v = \frac{dv}{dt} = 0$  et la puissance est :

$$u_{00} (u_{00} \xi_0 + \eta_0) + u_{00} \eta_0 + \zeta_0$$

La puissance perturbatrice fournie au système est finalement :

$$- \left[ f v (2 u_{00} + v) + 2 f v \frac{\eta}{\xi} + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \frac{\xi - \xi_0}{\xi} + (1 + 2 f u_{00}) \frac{\eta - \eta_0}{\xi} \right. \\ \left. + f \frac{\xi - \xi_0}{\xi} \right] [(u_{00} + v) \xi + \eta] + u_{00} [u_{00} (\xi - \xi_0) + v \xi + \eta - \eta_0] \\ + u_{00} (\eta - \eta_0) + v \eta + \zeta - \zeta_0$$

### 9.2.3. Energie fournie pendant une période

On l'obtient en intégrant la quantité précédente sur une période ;  $v, \xi, \eta, \zeta$  sont des fonctions périodiques de même période (déphasées comme il a été dit ci-dessus). Les autres facteurs sont des constantes. Nous noterons simplement :

$$\int_{\text{période}} = \int$$

Tous les termes ne comportant pas de produits de fonctions déphasées disparaissent et il reste :

$$\begin{aligned}
 & - f \int v \left[ 2 u_{00} + v + 2 \frac{\eta}{\xi} \right] \left[ (u_{00} + v) \xi + \eta \right] dt \\
 & - (u_{00} + g + f u_{00}^2) \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\xi - \xi_0) dt \\
 & - (1 + 2 f u_{00}) \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\eta - \eta_0) dt - f \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\xi - \xi_0) dt \\
 & + \int v (u_{00} \xi + \eta) dt
 \end{aligned} \tag{IX-1}$$

### 9.3. DISCUSSION

On ne peut tirer aucun renseignement quantitatif de l'expression (IX-1) ci-dessus, car on ne peut pousser plus loin les calculs. (On ne peut notamment pas linéariser l'énergie mise en jeu par une perturbation du premier ordre étant du second ordre comme produit de quantités de premier ordre, force et déplacement. On vérifie d'ailleurs qu'en linéarisant tous les termes du (IX-1) disparaissent). Cependant, l'étude parallèle de l'expression (IX-1) donnant l'énergie fournie pendant une période et de la relation (II-4) donnant l'accélération (donc la force) perturbatrice à l'instant  $t$ , permet de faire quelques remarques :

$$\begin{aligned}
 - \frac{dv}{dt} = & f v (2 u_{00} + v) + v + 2 f v \frac{\eta}{\xi} \\
 & + (u_{00} + g + f u_{00}^2) \frac{\xi - \xi_0}{\xi} + (1 + 2 f u_{00}) \frac{\eta - \eta_0}{\xi} + f \frac{\xi - \xi_0}{\xi}
 \end{aligned} \tag{II-4}$$

Le premier et le dernier terme de l'expression (IX-1) sont des termes résistants. Ils proviennent en effet des trois premiers termes du second membre de (II-4) dont nous savons (§ 2.3.2) que ce sont toujours des termes d'amortissement. Les autres sont issus directement des termes de (II-4) susceptibles d'être moteurs,

Nous connaissons la signification physique de :

- $\xi - \xi_0$  : variation de la masse de fluide présente dans la conduite  
 $\eta - \eta_0$  : lié à la variation de l'abscisse du centre de masse correspondant  
 $\zeta - \zeta_0$  : variation du moment d'inertie de cette masse par rapport à l'origine.

Ces quantités sont multipliées sous le signe somme par  $v + \frac{\eta}{\xi}$  que l'on peut remplacer sans changer la valeur des intégrales par  $v + \frac{\eta}{\xi} - \frac{\eta_0}{\xi_0}$ . En effet, pour la seconde, par exemple :

$$\int \frac{\eta_0}{\xi_0} (\xi - \xi_0) dt = \frac{\eta_0}{\xi_0} \int (\xi - \xi_0) dt = 0$$

$\frac{\eta}{\xi}$  étant l'abscisse du centre de gravité et puisque  $u(z, t) = u_{00} + v(t) + z$ , ce facteur  $(v + \frac{\eta}{\xi} - \frac{\eta_0}{\xi_0})$  est la perturbation de vitesse de la particule située à l'instant t au centre de gravité.

On ne peut rien dire des ordres de grandeur respectifs des trois intégrales :

$$\int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\xi - \xi_0) dt, \quad \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\eta - \eta_0) dt, \quad \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\zeta - \zeta_0) dt$$

Au seuil, elles sont fonction des paramètres définissant ce seuil,  $u_{00}$  et  $\omega$  par exemple. Par contre, les coefficients de ces termes sont au seuil des constantes numériques connues. Nous les calculerons pour le premier seuil dans le domaine :

$$-1 \leq g \leq 1$$

$$1 \leq f \leq 5$$

entourant les valeurs nominales  $g = 0$ ,  $f = 3$ . Cette zone, à la lumière des résultats des précédents chapitres, correspond bien au domaine expérimental.

9.3.1. "Terme de masse"

$$- (u_{00} + g + f u_{00}^2) \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\xi - \xi_0) dt$$

Son coefficient  $-(u_{00} + g + f u_{00}^2)$  varie de  $-1,15$  à  $0,95$  environ. Il s'annule notamment pour des valeurs de  $g$  de l'ordre de  $-0,1$ . Si on se reporte aux figures 4 et 5 relatives au cas (1) considéré ici, on ne constate aucune variation importante dans le domaine ci-dessus, aussi bien de la valeur de  $u_{00}$  au seuil que de la valeur de  $\omega$  au seuil. Le "terme de masse" étant dans ce domaine tantôt moteur, tantôt résistant, on peut en déduire semble-t-il que le rôle qu'il joue est peu important.

9.3.2. "Terme de centre de masse"

$$- (1 + 2 f u_{00}) \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\eta - \eta_0) dt$$

Son coefficient  $-(1 + 2 f u_{00})$  varie de  $-2$  à  $-1,1$  environ, c'est-à-dire assez peu. De plus, lorsqu'il varie, soit par  $f$ , soit par  $u_{00}$ , les termes résistants varient aussi.

Cependant, si nous admettons provisoirement des valeurs négatives pour  $f$  (qui n'ont pas de sens physique, mais qui conservent un sens mathématique), le terme considéré disparaît pour  $1 + 2 f u_{00} = 0$ ,  $f = 1 - \frac{1}{2 u_{00}}$ .

Cette valeur est de :

- 5 pour  $u_{00} = 0,10$
- 2,5 pour  $u_{00} = 0,20$
- 1 pour  $u_{00} = 0,50$

Les points correspondants ne sont pas trop éloignés de la région où la première nappe se raccorde à la seconde, région où  $u_{00}$  et  $\omega$  au seuil varient beaucoup pour une faible variation de  $f$ . Bien qu'on ne puisse conclure avec certitude, il semble que contrairement au précédent le terme :

$$- (1 + 2 f u_{00}) \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\eta - \eta_0) dt$$

soit en général moteur et joue un rôle important.

### 9.3.3. "Terme de moment d'inertie"

$$- f \int (v + \frac{\eta}{\xi}) (\xi - \xi_0) dt$$

Son coefficient est  $-f$  qui est également coefficient de termes toujours résistants (à  $f > 0$ ). Lorsque  $f$  s'approche de zéro, on ne peut dire si les variations importantes d'allure de la surface seuil que l'on constate proviennent de la disparition de ce terme moteur ou de la disparition des termes résistants déjà cités. On ne peut donc conclure.

Le calcul de l'énergie mise en jeu par la perturbation dans le cas général ( $l_0 \neq 0$ ,  $l_1 \neq 0$ ,  $s \neq 0$ ), outre qu'il serait beaucoup plus lourd (il suffit de comparer les relations (II-4) et (II-14') pour s'en convaincre), ne nous apporterait pas de renseignements supplémentaires. Nous ne le ferons pas ici.

## 9.4. CONCLUSION

Après avoir fait le point des renseignements déjà réunis dans les chapitres antérieurs sur le mécanisme du phénomène, nous avons, par des considérations énergétiques, confirmé les indications obtenues dans le chapitre II sur les termes moteurs.

Des trois termes susceptibles d'être moteurs, le terme lié à la variation de masse (seul terme pris en compte dans le mécanisme parfois avancé sous le nom "d'effet d'allègement") semble le moins influent, tout au moins dans les gammes usuelles de paramètres. Restent deux termes, l'un lié à la variation de l'abscisse du centre de masse, l'autre à la variation du moment d'inertie de la masse fluide par rapport à l'origine, dont le premier au moins semble important.

## CHAPITRE X

### UTILISATIONS ET EXTENSIONS DU MODELE MONOPHASE

#### 10.1. INTRODUCTION

Conçu pour vérifier que l'"effet de densité" pouvait, à lui seul, expliquer le phénomène d'oscillations hydrodynamiques et pour étudier le mécanisme de celui-ci, le modèle monophasé a pleinement rempli son rôle.

Cependant, étant donné le bon accord entre les prévisions obtenues par le modèle et la réalité expérimentale, il est tentant d'essayer d'étendre son champ d'application. Nous donnerons ci-dessous des exemples des utilisations et des extensions possibles du modèle monophasé.

#### 10.2. LOIS GOUVERNANT LES SEUILS D'OSCILLATIONS

C'est l'étude amorcée aux chapitres VI et VII ci-dessus. Nous y avons vu en effet qu'une étude générale dépassait largement le cadre de ce travail.

Dans les chapitres VI et VII nous avons établi l'influence des différents paramètres en les faisant varier autour d'un cas "de référence" ( $l_0 = 0$   $l_1 = 1$   $s = 0$ ) et au voisinage de conditions "nominales" ( $g = 0$   $f = 3$ ).

Il est évidemment possible, en utilisant les programmes de calcul de l'annexe XI, de poursuivre cette investigation pour de nouvelles gammes des paramètres, avec un cas de référence et des conditions nominales

différents. Nous avons déjà vu l'intérêt que présenteraient certaines de ces investigations (influence du paramètre  $s$ , possibilité de comparaison avec des expériences faites à géométrie donnée, etc...). Nous n'insisterons pas davantage sur ces possibilités.

### 10.3. LOIS DE SIMILITUDE

Dans les cas fréquents où la schématisation géométrique et les hypothèses ayant servi à l'établissement des équations du modèle sont acceptables, nous connaissons les paramètres adimensionnels gouvernant le phénomène d'oscillations.

Il est aisé d'en déduire les lois de similitude pour l'étude expérimentale éventuelle des performances d'une installation sur maquette à échelle réduite, ou avec un fluide différent.

#### 10.3.1. Paramètres de géométrie

Pour les paramètres de géométrie, la similitude ne pose pas de problème. Il suffit de conserver :

$$l_{of} = \sum_i \left( \frac{l_i}{\sigma_i^2} \frac{D_c}{D_i} \frac{\Lambda_i}{\Lambda_c} \right) + \sum_i \frac{D_c}{L_c} \frac{1}{\Lambda_c} \left( \frac{1 + \psi_i}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_i^2 - 1} \right)$$

$$l_{oi} = \sum_i \frac{L_i}{\sigma_i}$$

$$l_1 = \frac{L_1}{L_c}$$

$$f = \frac{\Lambda}{2} \frac{L_c}{D}$$

(La simple homothétie n'est pas acceptable en général car elle ne permet pas de conserver  $l_{of}$  et  $f$ ).

10.3.2. Autres paramètres

Nous affecterons du signe ' les grandeurs relatives à la maquette.

Il faut conserver :

$$u_{oo} = \frac{U_{oo} H_c R_o}{L_c W} = \frac{U'_{oo} H'_c R'_o}{L'_c W'}$$

$$g = \frac{G \sin \varphi (H_c R_o)^2}{L_c W^2} = \frac{G \sin \varphi' (H'_c R'_o)^2}{L'_c W'^2}$$

$$s = \frac{H_o}{H_c} = \frac{H'_o}{H'_c}$$

Ceci impose trois relations aux paramètres de fonctionnement :

$$H'_o = H_o \frac{H'_c}{H_c}$$

$$W' = W \left( \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{L_c}{L'_c} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{H'_c R'_o}{H_c R_o}$$

$$U'_{oo} = U_{oo} \left( \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{L'_c}{L_c} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Il est intéressant de constater qu'une fois la géométrie fixée, on peut en principe choisir arbitrairement le fluide (et la pression) à utiliser dans la maquette et que l'on dispose en plus d'un degré de liberté, le rapport  $\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}$  n'étant soumis à aucune condition (il doit seulement être fini et non nul, car il ne figure pas dans les paramètres réduits de géométrie).

Il faut toutefois s'assurer que  $H'_o$ ,  $W'$ ,  $U'_{oo}$  sont des valeurs physiquement réalisables.

#### 10.4. AMELIORATION D'UNE INSTALLATION DONNEE OU RECHERCHE DES CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT OPTIMALES

Ce problème est lié à la connaissance des lois gouvernant les seuils d'oscillations (§ 10.2 ci-dessus).

Une fois ces lois connues, il est aisé de prévoir des modifications de la géométrie (augmentation du paramètre  $l_{of}$  par exemple) susceptibles de retarder l'apparition du phénomène, et de chiffrer l'intérêt de ces modifications. De même, le modèle peut faciliter la recherche de conditions de fonctionnement plus favorables (influence du paramètre  $s$  par exemple).

#### 10.5. RECHERCHE DE CORRELATIONS EXPERIMENTALES

Le grand nombre de paramètres expérimentaux rend difficile l'établissement de corrélations et, à notre connaissance, il n'en existe pas actuellement. L'analyse dimensionnelle et le paragraphe 6.6. nous fournissent des renseignements intéressants sur des méthodes possibles de corrélation.

Il semble qu'il soit particulièrement intéressant :

- pour le seuil à faible sous-saturation, de tenter de corréler le temps de parcours réduit de la zone chauffante,
- pour le seuil à forte sous-saturation, de tenter de corréler la longueur réduite  $\lambda_0$  (chauffante sans ébullition),
- pour la fréquence au seuil, de tenter de corréler le paramètre  $\mu$ , produit de la fréquence par le temps de parcours, zone adiabatique amont exclue.

#### 10.6. PREVISION DES SEUILS D'OSCILLATION POUR UNE INSTALLATION DONNEE

Malgré la schématisation du modèle, le chapitre VIII a montré que, au moins dans certains cas, il pouvait servir avec une approximation

acceptable à la prévision quantitative. Les difficultés qu'il faut s'attendre à rencontrer ont été passées en revue dans le chapitre VIII (§ 8.4.2). A la lumière des résultats de ce chapitre, il faut retenir que :

- a) La surface (S) limitant domaines de fonctionnement possible et impossible est très mal représentée dans le modèle, ce qui n'est nullement surprenant. Dans la pratique, on possède en général les éléments (corrélations de perte de pression, ou détermination directe) qui permettent de tracer une meilleure approximation de la surface (S) réelle.
- b) Le paramètre de sous-saturation  $s$  est très mal défini, du fait de l'écart entre l'équation d'état réelle et l'approximation adoptée dans le modèle (influence notamment de l'ébullition locale et du glissement). Une meilleure connaissance des lois des écoulements double phase devrait permettre dans l'avenir de lever en partie cette difficulté, et de montrer dans quelle mesure on peut considérer le volume spécifique apparent comme une fonction linéaire de l'enthalpie.

Une autre difficulté pratique est l'importance du travail matériel,  $l_0$  et  $l_1$  étant supposés fixés (géométrie), il faut comme au chapitre VI :

- tracer dans le plan (g, f) les courbes iso  $u_{00}$  pour plusieurs valeurs du paramètre de sous-saturation  $s$  ;
- en déduire, pour les mêmes valeurs du paramètre  $s$  les courbes seuil  $u_{00}$  (g) dans le plan  $f = \text{constante}$  correspondant à la géométrie considérée ;
- en déduire dans le plan ( $s, u_{00}$ ) les courbes seuil paramétrées en g.

Le chapitre VIII nous a montré en effet que cette dernière représentation est la plus utile (figures 45, 47, 49 et 51). Compte tenu de la forme des "équations en  $\omega$ " (IV-7) qui sont transcendantes en  $u_{00}$ ,  $s$  et  $\omega$  et linéaires en g et f, il n'est malheureusement pas possible de mettre au point facilement une autre méthode de résolution. Toutefois,  $u_{00}$  variant

on l'a vu, relativement peu, il serait intéressant, une fois son ordre de grandeur à peu près connu, de tenter de résoudre chaque équation du système par itération à  $l_0$ ,  $l_1$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $s$  et  $\omega$  donnés,  $u_{00}$  étant la seule inconnue. Il suffirait ensuite :

- de tracer pour chaque couple  $(g, s)$  les deux courbes  $u_{00}(\omega)$  correspondant aux solutions des deux équations du système (IV-7) résolu alors graphiquement ;
- d'en déduire les courbes  $u_{00}(s)$  paramétrées en  $g$ .

Encore faudrait-il vérifier qu'une résolution par itération est possible.

#### 10.7. VERIFICATION DE LA LEGITIMITE DE LA LINEARISATION

La plupart des auteurs de "modèles" destinés à la détermination des seuils d'oscillations sont amenés, comme nous-mêmes, à linéariser leurs équations pour pouvoir poursuivre les calculs. Cela soulève des difficultés théoriques, les solutions d'un système et celles du système linéarisé correspondant pouvant être différentes. En conséquence, il serait particulièrement intéressant de comparer le seuil trouvé par le modèle (linéarisé) au seuil résultant du système d'équations non linéarisées (I-17) (I-18) (I-19) (I-20) et (II-14).

Bien que nécessitant des calculs numériques importants (il faut calculer l'état du système à des instants suffisamment rapprochés), cette comparaison serait possible avec le modèle monophasé.

Il suffirait d'entrer, comme valeurs initiales des paramètres dans le système non linéarisé, des valeurs voisines du seuil calculé avec le système linéarisé et d'étudier l'évolution du système.

## 10.8. EXTENSIONS DU CHAMP D'APPLICATION DU MODELE

En reprenant en partie les calculs des chapitres I à IV, on peut envisager d'étendre la validité du modèle à des cas non traités ci-dessus.

### 10.8.1. Présence de singularités dans la zone adiabatique aval

Nous avons vu (§ 6.5.2) qu'il est en général impossible, dans l'état actuel du modèle, de tenir compte de ces singularités. On peut (sans difficultés théoriques, mais en alourdissant les calculs) en tenir compte rigoureusement en reprenant les calculs à partir du chapitre II.

Il suffit de décomposer la zone adiabatique aval en plusieurs tronçons, et d'ajouter les termes correspondants dans la condition aux limites dynamique (II-14').

Cette possibilité est intéressante dans les cas où la zone adiabatique aval comporte deux tronçons de sections différentes comme dans [1].

### 10.8.2. Introduction de lois de frottement plus réalistes

Pour des raisons de simplicité, nous avons adopté un coefficient de Darcy  $\Lambda = \text{cte.}$

Dans les corrélations de pertes de pression par frottement en double phase (par exemple dans celle de Martinelli-Nelson [85] et [86]) le coefficient de Darcy est généralement une fonction de la qualité, c'est-à-dire de l'enthalpie :

$$\Lambda = \Lambda (H)$$

La masse spécifique  $R$  et l'enthalpie  $H$  étant liées par une relation biunivoque, on peut considérer  $\Lambda$  comme une fonction de  $R$  :

$$\Lambda = \Lambda (R)$$

L'introduction d'une telle loi dans le modèle est facile. A côté des fonctions  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\xi_1$  subsistant dans les termes de gravité et d'inertie, il s'introduit dans les termes de frottement des fonctions :

$$\xi_f = \int_{\lambda(t)}^1 \frac{f}{f_0} \rho dz$$

$$\eta_f = \int_{\lambda(t)}^1 \frac{f}{f_0} \rho z dz$$

$$\zeta_f = \int_{\lambda(t)}^1 \frac{f}{f_0} \rho z^2 dz$$

$$\xi_{1f} = \int_1^{1+l_1} \frac{f}{f_0} \rho dz$$

où  $f_0$  est la valeur de  $f$  dans les zones à masse spécifique constante.

$\frac{f}{f_0}$  n'est fonction que de  $\rho$  et les intégrales ci-dessus sont calculables de la même façon que  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\xi_1$ .

### 10.8.3. Modification de la condition aux limites dynamique

Cette condition est la différence de pression  $\Delta P$  imposée entre les extrémités du canal.

Lorsqu'elle n'est pas constante comme dans le modèle (cas de la convection naturelle ou de la convection forcée avec un by-pass important ou de nombreux canaux en parallèle), cette différence de pression  $\Delta P$  est :

- soit faiblement fonction du débit à l'entrée de la conduite (cas d'un by-pass peu important ou d'un canal chauffant en parallèle avec un nombre

restreint d'autres canaux lorsque le débit total peut être considéré comme constant ;

- soit fonction du débit de la pompe (en convection forcée sans by-pass).

a) Dans le premier cas  $\sigma_{BP}$  étant le rapport de la section du by-pass à la section de la conduite et  $u_{BP}$  la vitesse réduite dans le by-pass en régime permanent, cette vitesse devient, en régime transitoire :

$$u_{BP} = \frac{v}{\sigma_{BP}}$$

(v est, comme au chapitre II, la perturbation de vitesse dans la conduite).

L'équation de la dynamique appliquée au by-pass donne alors :

$$\Delta p_{BP} = \int_{\text{entrée}}^{\text{sortie}} \left[ -\frac{1}{\sigma_{BP}} \frac{dv}{dt} + g_{BP} + f_{BP} \left( u_{BP} - \frac{v}{\sigma_{BP}} \right)^2 \right] \rho dz$$

Soit  $l_{BP}$  la longueur réduite du by-pass. Faisons apparaître la différence de pression en régime permanent  $\Delta p_0$ .  $\rho$  étant constant et égal par définition à l'unité dans le by-pass, il vient :

$$\Delta p_{BP} = \Delta p_0 - \frac{l_{BP}}{\sigma_{BP}} \frac{dv}{dt} - f_{BP} l_{BP} \left( 2 u_{BP} - \frac{v}{\sigma_{BP}} \right) \frac{v}{\sigma_{BP}} \quad (X-1)$$

L'équation (II-14') condition aux limites dynamique du modèle reste valable à condition de remplacer dans le premier membre :

$$- l \frac{dv}{dt} \text{ par } - \left( 1 + \frac{l_{BP}}{\sigma_{BP}} \right) \frac{dv}{dt}$$

et dans le second membre :

$$f l (2 u_{00} + v)v \text{ par } f l (2 u_{00} + v)v + f_{BP} \frac{l_{BP}}{\sigma_{BP}} \left( 2 u_{BP} - \frac{v}{\sigma_{BP}} \right) v$$

Ces deux modifications ont une influence stabilisatrice.

Pour l'équation linéarisée, la modification du second membre revient à remplacer  $2 f l u_{00} v$  par :

$$2 f l u_{00} v + 2 f_{BP} \frac{l_{BP}}{\sigma_{BP}} u_{BP} v = 2 f u_{00} v \left( 1 + \frac{f_{BP}}{f} \frac{u_{BP}}{u_{00}} \frac{l_{BP}}{\sigma_{BP}} \right)$$

D'après (II-15)  $l = l_0 + \lambda + \xi + \xi_1$ .

On constate que la modification de la condition aux limites revient au même que l'addition de deux quantités positives à  $l_{of}$  et  $l_{oi}$ .

$$l_{of} \text{ est remplacé par } l_{of} + \frac{f_{BP}}{f} \frac{u_{BP}}{u_{00}} \frac{l_{BP}}{\sigma_{BP}} \quad (X-2)$$

$$l_{oi} \text{ est remplacé par } l_{oi} + \frac{l_{BP}}{\sigma_{BP}} \quad (X-3)$$

- b) Dans le second cas, la différence de pression entre les extrémités du canal est la différence entre la charge motrice fournie par la pompe et la perte de pression dans le reste du circuit. Comme il n'y a pas de by-pass et pas de région en double phase extérieure au canal, la vitesse est partout proportionnelle à la vitesse  $u_{00} + v$  à l'entrée du canal. Pour une vitesse de régime permanent  $u_{00}$  donnée et connaissant la caractéristique de la pompe, il est aisé de mettre la charge motrice sous la forme approchée :

$$P_m = P_{m0} - \alpha_m v - \beta_m v^2$$

par un développement en série de Taylor.  $\alpha_m$  et  $\beta_m$  sont des constantes,  $\alpha_m$  est positif si la caractéristique de pompe est plongeante (cas général), négatif dans le cas contraire.

De même, la perte de pression du circuit, canal exclu, peut se mettre sous la forme approchée :

$\Delta p_r = \Delta p_{ro} + \alpha_r v + \beta_r v^2 + \gamma_r \frac{dv}{dt}$  où  $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$  sont des constantes positives. La différence de pression aux bornes du canal sera :

$$\Delta p_m - \Delta p_r = (\Delta p_{mo} - \Delta p_{ro}) - \gamma_r \frac{dv}{dt} - (\alpha_m + \alpha_r) v - (\beta_m + \beta_r) v^2$$

Ici encore, on peut conserver l'équation (II-14'), condition aux limites dynamique, en remplaçant dans le premier membre :

$$- \frac{dv}{dt} \text{ par } - (1 + \gamma_r) \frac{dv}{dt}$$

et dans le second membre :

$$f l (2 u_{oo} + v)v \text{ par } f l (2 u_{oo} + v) v + (\alpha_m + \alpha_r) v + (\beta_m + \beta_r) v^2$$

Ces deux modifications ont une influence stabilisatrice dans le cas général. Pour l'équation linéarisée, elles reviennent au même que l'addition de deux quantités positives à  $l_{of}$  et  $l_{oi}$  :

$$l_{of} \text{ est remplacé par } l_{of} + \frac{1}{2 f u_{oo}} (\alpha_m + \alpha_r) \quad (X-4)$$

$$l_{oi} \text{ est remplacé par } l_{oi} + \gamma_r \quad (X-5)$$

De nombreux auteurs notent que, dans les mêmes conditions, le fonctionnement en convection forcée, comparé au fonctionnement en convection naturelle, possède une influence stabilisatrice. L'origine de cet effet est mise en évidence par les expressions (X-4) et (X-5) ci-dessus. Cette influence stabilisatrice est d'autant plus nette que la caractéristique de pompe est plus plongeante et qu'il y a plus de pertes de charges sur le circuit simple phase extérieur au canal.

#### 10.8.4. Cas où une perturbation périodique ou quasi périodique est appliquée au système

C'est le cas notamment des installations fonctionnant à bord de navires où on peut considérer l'accélération  $g$  du champ de forces de masse comme la somme d'une quantité constante (accélération due à la pesanteur) et d'une quantité quasi périodique (accélération due au mouvement du navire).

On peut en tenir compte dans le modèle monophasé, en modifiant les équations en  $\omega$  (IV.7). Cette modification, introduisant le temps dans le système, complique beaucoup le traitement numérique des équations.

#### 10.8.5. Cas où la densité volumique de puissance n'est pas une constante.

C'est le cas des réacteurs nucléaires où la répartition de puissance n'est pas uniforme (variation avec l'abscisse) et dépend de la masse spécifique de fluide réfrigérant (et où par conséquent la puissance varie avec le temps pendant les transitoires de débit).

Il n'est pas certain que l'extension du modèle monophasé à ces cas soit possible directement. En effet, il est nécessaire de reprendre les calculs depuis la mise en équation.

### 10.9. CONCLUSION

Nous avons passé en revue dans ce chapitre quelques applications et extensions possibles du modèle monophasé. Aux applications évidentes, dont des exemples ont été donnés dans les chapitres précédents (recherche des lois du seuil, prévision de ceux-ci, etc...) s'ajoutent notamment les possibilités suivantes :

- connaissance des lois de similitude du phénomène d'oscillations ;

- vérification sur cas particuliers de la légitimité de la linéarisation généralement adoptée dans les calculs théoriques du phénomène ;
- extension du modèle, pour des géométries ou des lois de frottement plus compliquées que celles retenues dans cette étude ;
- extension du modèle pour les conditions aux limites dynamiques usuelles (correspondant à la convection forcée sans by-pass ou avec by-pass de faible section) autres que celle adoptée dans cette étude (et qui correspondait à la convection forcée avec by-pass de section importante ou à la convection naturelle).

Ainsi, dépassant son rôle initial d'étude de mécanisme, le modèle monophasé s'avère un instrument relativement souple dont nous sommes loin d'avoir épuisé toutes les possibilités.

## TROISIEME PARTIE

### C O N C L U S I O N S

III.1. Une étude bibliographique préliminaire nous a permis de faire le point des connaissances actuelles au sujet des oscillations apparaissant sous certaines conditions dans les écoulements chauffés avec ébullition.

Nous avons montré que les travaux étaient jusqu'à présent orientés plutôt vers une connaissance empirique et numérique du phénomène et que la compréhension de son mécanisme n'était acquise que de façon très fragmentaire. Nous avons d'ailleurs constaté que, dans l'état actuel de la connaissance des lois des écoulements diphasés, compréhension et prévision ne pouvaient être recherchées simultanément, à cause de la complexité des calculs prévisionnels.

Ceci nous a orienté vers la recherche du mécanisme par l'étude de modèles très schématiques, construits autour d'une hypothèse. Dans ce but, nous avons proposé deux modèles. Le premier, dit à "changement de configuration d'écoulement", attribue certains types d'oscillations à un mécanisme de relaxation dû aux lois reliant qualité, configuration d'écoulement et coefficient de perte de pression : Pour une qualité critique, le changement de configuration d'écoulement entraîne une réduction du coefficient de perte de pression qui a pour effet de provoquer une augmentation de débit et le retour à une qualité inférieure à la qualité critique. Ce comportement, comme il est facile de le voir, peut conduire à des oscillations entretenues. Le second est le "modèle monophasé", objet de la seconde partie de ce travail.

III.2. L'hypothèse de base du modèle monophasé attribue le rôle essentiel à l'"effet de densité", variation de la masse spécifique apparente d'un fluide en ébullition avec l'enthalpie. On aboutit à la définition du modèle monophasé en éliminant dans la réalité physique tout ce qui n'est pas directement lié à l'effet de densité et en remplaçant notamment le fluide diphasé par un fluide monophasé dont la masse spécifique est fortement fonction de l'enthalpie et dont les autres propriétés physiques sont des constantes. Le modèle monophasé est voisin du "modèle homogène" classique, mais il est conçu dans un esprit très différent. Le modèle monophasé est étudié dans le cas, réaliste pour les réacteurs nucléaires, où de nombreux canaux en parallèle maintiennent une différence de pression sensiblement constante entre les extrémités du canal, mais nous avons montré (chapitre X) que dans tous les cas il est possible de se ramener à cette condition aux limites.

III.3. Les équations du modèle monophasé sont écrites avec les hypothèses habituelles. Nous avons mis en évidence, par l'analyse dimensionnelle, les paramètres réduits gouvernant le comportement du modèle. Ces paramètres sont au nombre de sept. Quatre d'entre eux représentent la géométrie, soit deux longueurs équivalentes de zone adiabatique amont (relatives aux termes de friction et d'inertie), la longueur de zone adiabatique aval et un paramètre "de frottement" dans la zone chauffante. Les trois derniers sont les paramètres de fonctionnement. La "gravité réduite", en fait inversement proportionnelle au carré de la densité volumique de puissance, joue peu. Les deux paramètres les plus influents sont la sous-saturation réduite et le paramètre de débit, proportionnel en fait au quotient du débit par la puissance. La signification physique des paramètres réduits est donnée (chapitre V). Dans la mesure où les hypothèses du modèle peuvent être conservées, les lois de similitude peuvent (chapitre X) se déduire rigoureusement de ces paramètres. La suppression de certaines hypothèses introduirait quelques paramètres supplémentaires, comme par exemple le glissement et le rapport des coefficients de frottement en double et en simple phase,

mais ils ont une influence faible et les paramètres les plus importants sont ceux du modèle.

III.4. L'écriture de la condition aux limites dynamique nous a donné la clé du mécanisme moteur. La mise en oscillations est assurée, à partir de petites perturbations inévitables, par l'"effet de densité" grâce auquel les différents termes de perte de pression sont déphasés par rapport au débit. Cet effet de densité intervient dans les termes de pertes de pression par ses effets intégrés sur la masse de fluide présente dans la conduite, le centre de masse et le moment d'inertie correspondants. Les retards (liés au temps de parcours des différentes zones par une particule fluide) et les déphasages (liés en sus à la fréquence) sont particulièrement nombreux dans la chaîne fonctionnelle liant pertes de pression et débit. Dans le cas général, on compte cinq retards et neuf déphasages. (C'est dire la complexité des détails du mécanisme et la quasi impossibilité d'établir un critère de stabilité).

Le mécanisme moteur peut être décrit comme suit (chapitre II) à partir d'une variation accidentelle de débit (augmentation, par exemple) : l'augmentation de débit provoque une augmentation des pertes de pression. La condition aux limites dynamique (caractéristique hydraulique externe imposée) impose alors une diminution de débit. Lorsqu'il atteint sa valeur de régime permanent, les pertes de pression, du fait des retards et déphasages, sont encore supérieures à celles dudit régime et le débit continue à décroître. Il décroît cependant de moins en moins vite, car les pertes de pression décroissent et au bout d'un certain temps atteignent la valeur correspondant au régime permanent. On est alors ramené, au signe près, à la situation perturbée initiale, d'où entretien d'oscillations. Le raisonnement ci-dessus est tout à fait parallèle à celui dont on se sert habituellement pour expliquer les oscillations par "effet d'allègement retardé". L'effet d'allègement est une caricature du mécanisme réel lorsque l'écoulement est ascendant. Le raisonnement qui le justifie ne tient en effet compte que du terme de masse et ignore les termes dus au centre de masse et au moment

d'inertie. Or de ces trois termes il semble bien que le terme de masse soit le plus faible !

III.5. Admettant ensuite que le comportement du système pouvait, pour de petites perturbations, être décrit par un système d'équations linéarisées (cette hypothèse est justifiée par l'étude bibliographique et les raisonnements du chapitre II), nous nous sommes consacrés à partir du chapitre III à l'étude des seuils d'apparition des oscillations. Comme pour les systèmes réels, il y a un domaine, limité par une surface (S) dans l'espace des paramètres du modèle, où le point représentatif ne peut se trouver (domaine où le fonctionnement est impossible : chapitre III). Dans le domaine autorisé, la surface sur laquelle sont situés les seuils fait partie d'une surface ( $\Sigma$ ) plus importante. Connaissant les surfaces (S) et ( $\Sigma$ ) le tracé de la surface seuil est aisé. Sur le plan mathématique, la surface ( $\Sigma$ ) est déterminée par un système d'équations, dites "équations en  $\omega$ " comportant comme paramètre la pulsation  $\omega$  au seuil. L'établissement de ce système ne pose pas de problèmes particuliers, mais il est fort long et des équations en  $\omega$  sont compliquées. Les renseignements tirés de leur étude analytique sont restreints et nous avons été amenés à entreprendre une étude numérique (chapitre VI).

III.6. La validité du modèle monophasé est démontrée par la comparaison (chapitre VII) entre les lois du phénomène telles qu'elles découlent de l'étude ci-dessus et les observations expérimentales. Nous ne reviendrons pas ici sur l'influence des différents paramètres. Disons simplement que lorsqu'elles sont connues les tendances expérimentales coïncident toujours avec celles du modèle. Le modèle monophasé permet de retrouver la loi grossière reliant période et temps de parcours et les seuils multiples observés par plusieurs auteurs.

III.7. De plus, l'excellent accord quantitatif entre le modèle monophasé et l'expérience montre que les phénomènes négligés dans le modèle (augmentation du coefficient de frottement avec la qualité, apparition d'un

glissement entre phases) n'ont qu'une influence réduite sur la valeur des paramètres au seuil (chapitre VIII). Il est d'ailleurs possible, dans le cas où le modèle serait utilisé pour des calculs prévisionnels, de le rapprocher sur ces points de la réalité physique. On introduit aisément, comme dans les corrélations empiriques, un coefficient de frottement fonction de l'enthalpie ; l'influence du glissement peut, dans une certaine mesure, être prise en compte par l'équation d'état: la loi empirique reliant volume spécifique et enthalpie est remplacée dans le modèle par une loi linéaire que l'on peut ajuster dans la plage intéressante.

L'ébullition locale, comme prévu, joue en décalant sensiblement la valeur de l'enthalpie pour laquelle apparaît l'ébullition.

III. 8. Parmi les résultats importants d'ores et déjà acquis grâce au modèle monophasé, figure la mise en évidence du rôle fondamental du paramètre de sous-saturation. Les paramètres de géométrie étant fixés, on peut en première approximation, repérer le seuil par la valeur que prend à ce seuil le paramètre adimensionnel de débit pour une valeur donnée de la sous-saturation réduite. Lorsque cette sous-saturation est faible, son augmentation a une influence déstabilisatrice. Lorsqu'elle est grande, c'est le contraire.

Par ailleurs, à sous-saturation (dimensionnelle) donnée, une augmentation de la pression provoque une diminution du paramètre réduit de sous-saturation. Il en résulte qu'en général les installations basse pression fonctionnent dans la région où une augmentation de la sous-saturation est stabilisatrice, alors que les installations haute pression fonctionnent dans l'autre région. La comparaison directe entre les observations faites sur les deux types d'installations n'est pas toujours possible.

III. 9. Conçu pour une étude fondamentale du mécanisme des oscillations, le modèle monophasé a parfaitement rempli son rôle en permettant la mise en évidence de ce mécanisme. Il s'est de plus révélé être un outil plein de promesses pour la résolution d'autres problèmes liés aux seuils

d'oscillation. Nous avons amorcé l'étude de certains de ces problèmes (lois gouvernant les phénomènes, prévision quantitative). Nous en avons posé d'autres. Il est certain toutefois que le sujet est loin d'être épuisé.

Ainsi, une fois de plus, face aux résultats fragmentaires obtenus par des équipes disposant de moyens puissants, mais trop préoccupées de l'utilité immédiate de leurs recherches, la voie fondamentale s'est avérée la plus rentable. Profitant de notre modeste contribution à la résolution des problèmes posés par les écoulements diphasés, nous serions heureux si nous avons réussi à le montrer. Le nécessaire équilibre entre recherches fondamentale et appliquée est en effet souvent remis en cause, dans ce domaine, par des priorités dues à des réalisations importantes comme les réacteurs nucléaires.

B I B L I O G R A P H I E

[ 1 ]

S. FABREGA

Instabilités hydrodynamiques limitant la puissance des réacteurs à eau bouillante. Rapport final. EUR 1509. f EURAEC 909  
Contrat Euratom 076 6I I2 RDF (Accord de coopération Euratom-Etats-Unis).

[ 2 ]

J. BOURE

Etude théorique des instabilités hydrodynamiques dans un canal à ébullition. Un modèle à effet de densité et un modèle à propagation. Communication au Symposium de la Société Européenne d'Energie Atomique. STUDSVIK (Suède). Octobre 1963.  
Traduction anglaise AEC tr 6364.

[ 3 ]

J. BOURE

Oscillations de débit dans un canal bouillant.  
Communication aux VIII<sup>e</sup> Journées de l'Hydraulique. Lille. Juin 1964.

[ 4 ]

ANONYME. (CENTRE d'ETUDES NUCLEAIRES de GRENOBLE).

Instabilités hydrodynamiques limitant la puissance des réacteurs à eau bouillante. Ier Rapport trimestriel.  
EUR 2059 f. EURAEC I230.  
Contrat Euratom 006 64 I TEEF (Accord de coopération Euratom-Etats-Unis).

[ 5 ]

H. MONDIN, S. FABREGA, R. SEMERIA.

Transfert de chaleur par ébullition dans les réacteurs  
Conférence INSTN, Janvier 1964.

[ 6 ]

J. BOURÉ

Hydrodynamique de la double phase dans les réacteurs.  
Conférence INSTN, Avril 1962.

- [ 7 ] M. LEDINEGG  
Unstabilität der Strömung bei Natürlichem und Zwangsumlauf.  
Die Wärme, 1938, 61, 891-898.
- [ 8 ] R.S. THURSTON  
Fluid flow equations  
Los Alamos Sc. Lab. N4-603U, Janvier 1960.
- [ 9 ] J.E. MEYER  
Conservation laws in one dimensional hydrodynamics  
WAPD BT 20, Septembre 1960.
- [ 10 ] H.S. ISBIN, YUNG SUNG SU  
Use of the mechanical Energy balance for two phase flow  
A.I.Ch. E. Journal, Mars 1961.
- [ 11 ] J. VOHR.  
The energy equation for two phase flow  
A.I.Ch.E. Journal, Mai 1962.
- [ 12 ] D.E. LAMB, J.L. WHITE  
Use of momentum and energy equations in two phase flow  
A.I.Ch.E. Journal, Mai 1962.
- [ 13 ] G. STANDART  
The mass, momentum and energy equations for heterogeneous flow  
systems Chem. Eng. Sc.  
1964, 19, 227-236.
- [ 14 ] G. BIRKHOFF  
Averaged conservation laws in pipes  
J. of Math. Analysis and Appl., 1964, 8, 66-67.
- [ 15 ] R.M. ROSENBERG  
Non linear oscillations  
Applied Mech. Rev., Novembre 1961.

- [16] A. BLAQUIERE  
Travaux divers et notamment : Extension de la méthode de Nyquist aux systèmes bouclés non linéaires.  
Cahiers de Physiques, Août 1960, N° 120.
- [17] N. MINORSKI  
Travaux divers et notamment : Non linear oscillations.  
Van Nostrand, 1962.
- [18] J.F. LEATHRUM, E.F. JOHNSON, L. LAPIDUS  
A new approach to the stability and control of non linear process.  
A.I.Ch.E. Journal, Janvier 1964; 10, 1.
- [19] E.F. INFANTE, L.G. CLARK  
A method for the determination of the domain of stability of second order non linear autonomous systems.  
J. of Applied Mechanics, Juin 1964.
- [20] R.P. ANDERSON, P.A. LOTTES,  
Boiling stability.  
Preprint. Symposium de Karlsruhe, Mars 1960 et Reactor Technology Part B, 1962, 2, 3-28.
- [21] K. GARLID, N.R. AMUNDSON, H.S. ISBIN.  
A theoretical study of the transient operation and stability of two phase natural circulation loops.  
ANL 6381, Juin 1961.
- [22] R.P. ANDERSON, L.T. BRYANT, J.C. CARTER, J.F. MARCHATERRE  
Transient analysis of two phase natural circulation systems.  
ANL 6653, Décembre 1962.
- [23] E.H. WISSLER  
The transient behaviour of a two phase natural circulation loop  
Ph. D. Thesis, Juin 1955.
- [24] E.H. WISSLER, H.S. ISBIN, N.R. AMUNDSON  
The oscillatory behaviour of a two phase natural circulation loop  
A.I.Ch.E. Journal, Juin 1956, 2, 2.

- [ 25 ] G.B. WALLIS, J.H. HEASLEY  
Oscillations in two phase flow systems  
J. of Heat Transfer. Août 1961, 83C, 3.
- [ 26 ] E.R. QUANDT  
Analysis of parallel channel transient response and flow oscillations. WAPD AD TH 489, Avril 1959.
- [ 27 ] A.L. BLUBAUGH, E.R. QUANDT  
Analysis and measurement of flow oscillations  
WAPD AD TH 538. 1960  
Repris partiellement en WAPD T 1134.
- [ 28 ] J.E. MEYER  
Hydrodynamic models for the treatment of reactor thermal transients  
Nucl. Sc. and Eng., 1961, 10, 269-277.
- [ 29 ] J.E. MEYER, W.D. LONG  
A channel integral model for the treatment of transient fluid flow  
WAPD BT 25, Août 1961.
- [ 30 ] J.E. MEYER, J.S. WILLIAMS  
A momentum integral model for the treatment of transient fluid flow  
WAPD BT 25, Mai 1962.
- [ 31 ] J.E. MEYER, R.P. ROSE  
Application of a momentum integral model to the study of parallel channel boiling flow oscillations.  
ASME Paper 62 HT, 41, Août 1962.
- [ 32 ] J.E. MEYER, E.A. REINHARD  
A small perturbation approach to the study of parallel channel boiling flow oscillations.  
WAPD TM 342, Janvier 1963.
- [ 33 ] S. LEVY, E.S. BECKJORD  
Hydraulic stability in a natural circulation loop with net steam generation at 1000 psia.  
GEAP 3215, Juillet 1959.

- [34] S. LEVY, C.L. SWAN  
Performance, Two phase pressure drop, burnout and hydraulic oscillation of an inclined test section with net steam generation at 1000 psia  
GEAP 3228 (Rev. I), Août 1959.
- [35] E.P. QUINN, J.M. CASE  
Natural circulation loop performance at 1000 psia under periodic accelerations.  
GEAP: 3397, (Rev. I), Mai 1960.
- [36] E.P. QUINN  
Further experimental results on natural circulation loop performance at 1000 psia under periodic accelerations  
GEAP 3397 Addendum, Octobre 1960.
- [37] E.S. BECKJORD  
The stability of two phase flow loop and response to ship's motion.  
GEAP 3493 (Rev. I), Septembre 1960.
- [38] J.A. FLECK  
The dynamic behaviour of boiling water reactors.  
J. of Nucl. Energy, Février 1960, AI1.
- [39] J.A. FLECK  
A model for hydraulic instability  
Proc. of the 1960 Idaho Conf. on reactor kinetics.  
IDO 16791, Octobre 1960.
- [40] J.A. FLECK  
The nature of Boiling Water Reactor instability.  
UCRL 6287 T, Janvier 1961.
- [41] K.M. BECKER, S. JAHNBERG, I. HAGA, P.T. HANSSON, R.P. MATHISEN  
Hydrodynamic instability and dynamic burnout in natural circulation two phase flow. An experimental and theoretical study.  
AE 156, Septembre 1964.

- [42] K.O. SOLBERG, K.G. SCHJETNE  
The "Kjeller Model" for the dynamics of coolant channels in boiling water reactors."  
Communication au Symposium de la Soc. Europ. d'Energie Atomique STUDSVIK (Suède), Octobre 1963.
- [43] A. KIRCHENMAYER  
Dynamics of boiling water reactors with natural circulation.  
Communication au Symposium de la Soc. Europ. d'Energie Atomique. ZURICH, Septembre 1961.
- [44] H. AGER-HANSSSEN, H. CHRISTENSEN, A. KIRCHENMAYER  
Problems in the prediction of boiling water reactor stability.  
KR 34, Décembre 1962.
- [45] H. CHRISTENSEN  
Power to void transfer functions  
ANL 6385, Juillet 1961.
- [46] A.A. DAVIDOV,  
Investigation of flow pulsations in tubes of the evaporation section of radiant boilers  
AEC tr 4490, Original daté de 1955.
- [47] D.F. BABCOCK, R.R. HOOD  
Heavy water moderated power reactors. Progress report  
DP 625, Juillet 1961.
- [48] ANONYME. (Technische Hogeschool te Eindhoven)  
Final report on the research program on heat transfer and stability studies in Boiling Water Reactors.  
WW OI6 R70, Février 1965.
- [49] I.E. SEMENOVKER  
The occurrence of pulsations in the evaporation tubes of steam boilers  
AEC tr 4490, original daté de 1955.

- [ 50 ] W.H. LOWDERMILK, C.D. LANZO, B.L. SIEGEL  
Investigation of boiling burnout and flow stability for water flowing  
in tubes.  
NACA TN 4382, Septembre 1958.
- [ 51 ] E.J. Mac GOWAN, J.R. BODOIA  
An investigation of stability in a glass model steam generator  
WAPD BT 27, Décembre 1962.
- [ 52 ] R.F. KEMP, A.L. MORSE, R.W. WRIGHT, S.M. ZIVI  
Kinetic studies of heterogeneous water reactors  
RWD RL I67, 1960.
- [ 53 ] D.B. LANGMUIR  
Presentation of the Ramo Wooldridge Program/  
Proc. of the 1960 Idaho Conference on reactors kinetics  
Octobre 1960.
- [ 54 ] A.L. MORSE, R.W. WRIGHT, S.M. ZIVI.  
Kinetic studies of heterogeneous water reactors  
RWD RL I90, Décembre 1960.
- [ 55 ] D.L. PULLING, J.G. COLLIER  
Instabilities in two phase flow. preliminary experiments  
AERE M II05, Juillet 1963.
- [ 56 ] R.W. WRIGHT, S.M. ZIVI  
The relationship between hydrodynamic instability and power void  
transfer functions in natural circulation boiling water reactor.  
Trans. of Amer. Nucl. Soc., 1963, 6, I.
- [ 57 ] R.C. LUMMIS  
The frequency response of nucleate pool boiling heat transfer.  
NYO 9940, 1964.
- [ 58 ] R.V. BAILEY, P.C. ZMOLA  
Preliminary investigation of power removal from a boiling reactor.  
CF 53 II I45, Novembre 1953.

- [ 59 ] E.S. BECKJORD  
Dynamic analysis of natural circulation boiling water power reactors.  
ANL 5799, Mars 1958.
- [ 60 ] J.A. DE SHONG, W.C. LIPINSKI  
Analysis of experimental power reactivity feedback transfer functions  
for a natural circulation boiling reactor.  
ANL 5850, Juillet 1958.
- [ 61 ] J.A. THIE  
Dynamic behaviour of boiling reactors  
ANL 5849, 1959.
- [ 62 ] J. WEIL et al.  
Boiling water reactor stability.  
GER I468, 1957.
- [ 63 ] S.G. MARGOLIS, S. KAPLAN  
Transfer functions for boiling reactor stability calculation  
WAPD T II58, Avril 1960.
- [ 64 ] W.D. GEORGE  
The transient behaviour of a two phase natural circulation loop  
M.S. Thesis, Université du Texas, Août 1960.
- [ 65 ] J. RANGLES  
Kinetics of boiling hydraulic loops  
AEEW R 87, Août 1961.
- [ 66 ] A.B. JONES, D.G. DIGHT  
Hydrodynamic stability of a boiling channel.  
Part I KAPL 2170, Octobre 1961  
Part II KAPL 2208, Avril 1962  
Part III KAPL 2290, Juin 1963.
- [ 67 ] D.G. DIGHT  
Hydraulic flow stability analysis  
KAPL M EC II, Octobre 1961.

68

S.M. ZIVI, R.W. WRIGHT

Flow void feedback effects on power void transfer functions and hydrodynamic oscillations in B W R.  
TID 7662, 1963.

69

S.M. ZIVI, G.C.K. YEH

An analysis of the hydrodynamic stability of parallel channels in a natural circulation boiling water reactor.  
Trans. of Amer. Nucl. Soc. 1963, 6, I.

70

C.K. SANATHANAN

Dynamic analysis of coolant circulation in boiling water nuclear reactors.  
ANL 6847 (Ph. D. Thesis), Avril 1964.

71

D.A. FEINGOLD, J.N. CHAMPLIN

Stability analysis program for the prediction of hydrodynamic flow oscillations.  
KAPL M 6149, Avril 1964.

72

M. SUO et al

Investigation of boiling flow regimes and critical heat flux.  
Final report.  
NYO 3304-3, Mars 1965.

73

J.L. HUDSON, K.M. ATIT, S.G. BANKOFF

Response of a boiling channel to power or inlet flow modulation  
Chem. Eng. Sc. 1964, 19, 387-402.

74

P. BAKSTAD

Difference differential approximations to a first order partial differential equation describing the hydraulics of boiling water reactors.  
KR 54, Novembre 1963.

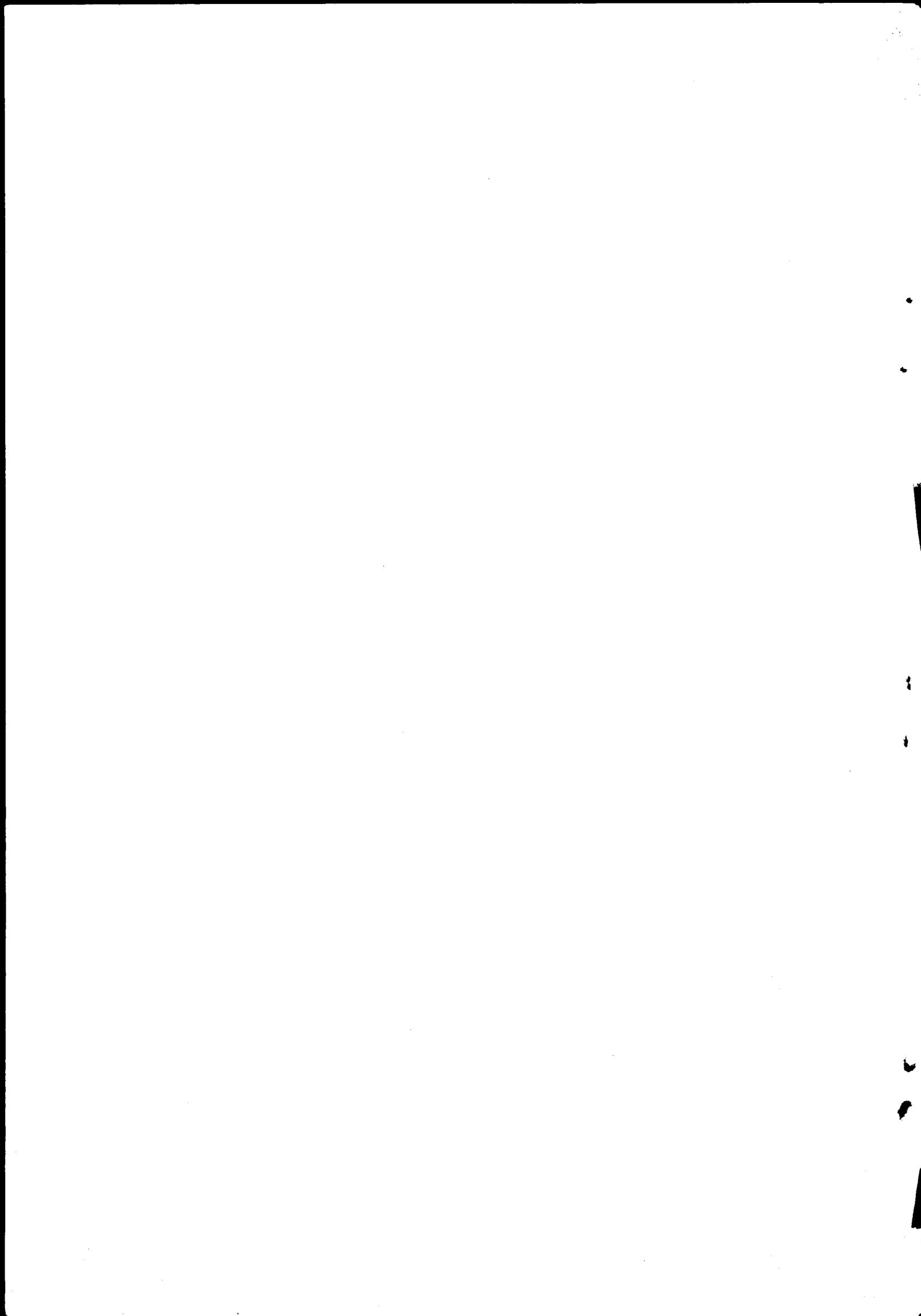
75

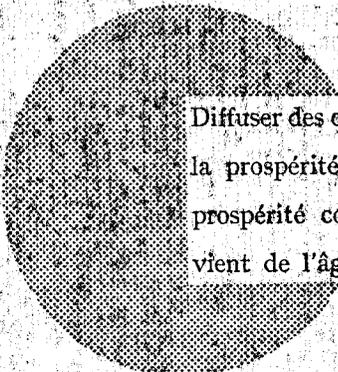
A.M. LAIRD, A.W. SCOTT, A.S.T. THOMSON

Natural circulation investigations on an experimental two tubes boiler.  
Trans. of the N.E. - Coast Inst. of Eng. and Shipbuilders  
Newcastle/Tyne, Mars 1958, 74.

- [76] R.J. WEATHERHEAD  
Hydrodynamic instability and the critical heat flux occurrence in forced convection vertical boiling channel  
TID I6539, Avril 1962.
- [77] R. MARCHAL  
Sur les écoulements pulsatoires provoqués par les effets de compressibilité dans les émulsions.  
Revue Générale de Thermique, Juin 1962, I, 6.
- [78] ANONYME (General Electric Company- San José)  
V B W R stability test report.  
GEAP 397I, Juin 1963.
- [79] P. DELAYRE, J.P. SAUNIER  
Instabilités d'écoulement du fluide dans un canal chauffant refroidi à l'eau.  
Rapport CEA I825, 1961.
- [80] L.E. WEAVER  
Improvement of boiling water reactors stability through minimization of boiling noise. Final report.  
EURAEK II38, 1964.
- [81] ANL-AMU Program (Argonne National Laboratory - Associated Midwest Universities) - concerne notamment les oscillations.  
En cours depuis février 1964.
- [82] N. ZUBER, F.W. STAUB  
A program of two phase flow investigation  
Accord de coopération Euratom-Etats-Unis.  
Contrat n° AT (40-3) -I89, Project Agreement 35,  
En cours depuis avril 1963.
- [83] J. BOURÉ  
Propagation de petites perturbations dans les écoulements diphasés avec transfert de masse et glissement.  
Communication aux VIII<sup>e</sup> Journées de l'Hydraulique. Lille. Juin 1964.

- [84] B. MARTINET  
Stabilité hydrodynamique dans un canal à ébullition. Modèle à coefficient de frottement variable  
Note interne TT/CENG I78 ( Décembre 1964 ).
- [85] R.W. LOCKHART, R.C. MARTINELLI  
Proposed correlation of data for isothermal two phase. two component flow in pipes.  
Chem. Eng. Progress, Janvier 1949, 45, I.
- [86] R.C. MARTINELLI, D.B. NELSON  
Prediction of pressure drop during forced convection boiling of water.  
Trans. of A.S.M.E., Août 1948.
- [87] T. ONIGA  
Calcul des tuyaux  
Matémine, 1949.
- [88] S.G. BANKOFF  
A variable density single fluide model for two phase flow with particular reference to steam water flow.  
J. of Heat Transfer, Novembre 1960, 82C, 4.





Diffuser des connaissances c'est distribuer de la prospérité — j'entends  
la prospérité collective et non la richesse individuelle — et cette  
prospérité contribue largement à la disparition du mal qui nous  
vient de l'âge des ténèbres.

Alfred Nobel

## BUREAUX DE VENTE

Tous les rapports Euratom sont vendus dans les bureaux suivants, aux prix indiqués au verso de la couverture (lors de la commande, bien indiquer le numéro EUR et le titre du rapport, qui figurent sur la couverture).

### PRESSES ACADEMIQUES EUROPEENNES

98, Chaussée de Charleroi, Bruxelles 6

Banque de la Société Générale - Bruxelles  
compte N° 964.558,

Banque Belgo Congolaise - Bruxelles  
compte N° 2444.141,

Compte chèque postal - Bruxelles - N° 167.37,

Belgian American Bank and Trust Company - New York  
compte No. 22.186,

Lloyds Bank (Europe) Ltd. - 10 Moorgate, London E.C.2,  
Postcheckkonto - Köln - Nr. 160.861.

### OFFICE CENTRAL DE VENTE DES PUBLICATIONS DES COMMUNAUTES EUROPEENNES

2, place de Metz, Luxembourg (Compte chèque postal N° 191-90)

#### BELGIQUE — BELGIË

MONITEUR BELGE  
40-42, rue de Louvain - Bruxelles  
BELGISCH STAATSBLAD  
Leuvenseweg 40-42 - Brussel

#### DEUTSCHLAND

BUNDESANZEIGER  
Postfach - Köln 1

#### FRANCE

SERVICE DE VENTE EN FRANCE  
DES PUBLICATIONS DES  
COMMUNAUTES EUROPEENNES  
26, rue Desaix - Paris 15<sup>e</sup>

#### GRAND-DUCHE DE LUXEMBOURG

OFFICE CENTRAL DE VENTE  
DES PUBLICATIONS DES  
COMMUNAUTES EUROPEENNES  
9, rue Goethe - Luxembourg

#### ITALIA

LIBRERIA DELLO STATO  
Piazza G. Verdi, 10 - Roma

#### NEDERLAND

STAATSDRUKKERIJ  
Christoffel Plantijnstraat - Den Haag

EURATOM — C.I.D.  
51-53, rue Belliard  
Bruxelles (Belgique)