

EUR 3632 i

COMUNITÀ EUROPEA DELL'ENERGIA ATOMICA - EURATOM

**APPLICAZIONE DEL METODO DELLE CARATTERISTICHE
ALL'EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE
LINEARE DI BOLTZMANN -
Alcune esperienze numeriche**

di

M.L. DEMURU

1967



**Centro Comune di Ricerca Nucleare
Stabilimento di Ispra - Italia**

Centro di Trattamento dell'Informazione Scientifica - CETIS

AVVERTENZA

Il presente documento è stato elaborato sotto gli auspici della Commissione delle Comunità Europee.

Si precisa che la Commissione delle Comunità Europee, i suoi contraenti, o qualsiasi altra persona che agisca in loro nome :

non garantiscono l'esattezza o la completezza delle informazioni contenute nel presente documento, né che l'uso di qualsiasi informazione, dispositivo, metodo o processo, descritti nel presente documento, non arrechino pregiudizio ai diritti sulle opere dell'ingegno e sulle invenzioni industriali;

non assumono alcuna responsabilità per i danni che dovessero risultare dall'uso di informazioni, dispositivi, metodi o processi descritti con il presente documento.

La presente relazione può essere acquistata presso gli uffici vendita indicati nella quarta pagina della copertina

al prezzo di Lit. 1.250

FF 10.—

FB 100.—

DM 8.—

Fl. 7.25

All'atto dell'ordinazione, si prega di menzionare il riferimento EUR e il titolo, che figurano sulla copertina di ciascuna relazione.

Stampato da SMEETS
Bruxelles, November 1967

Per la riproduzione di questo documento ci si è serviti della miglior copia disponibile.

EUR 3632 i

APPLICATION OF THE CHARACTERISTICS METHOD TO THE
BOLTZMANN LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION -
Some numerical experiments by M.L. DEMURU

European Atomic Energy Community - EURATOM
Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy)
Scientific Information Processing Center-CETIS
Brussels, November 1967 - 70 Pages - 15 Figures - FB 100

The method of characteristics is applied to the linear integro-differential equation of Boltzmann in one and two-dimensional geometries.

In this report some numerical results are given in order to compare the method of characteristics with Carlson's S_n method.

EUR 3632 i

APPLICATION OF THE CHARACTERISTICS METHOD TO THE
BOLTZMANN LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION -
Some numerical experiments by M.L. DEMURU

European Atomic Energy Community - EURATOM
Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy)
Scientific Information Processing Center-CETIS
Brussels, November 1967 - 70 Pages - 15 Figures - FB 100

The method of characteristics is applied to the linear integro-differential equation of Boltzmann in one and two-dimensional geometries.

In this report some numerical results are given in order to compare the method of characteristics with Carlson's S_n method.

EUR 3632 i

APPLICATION OF THE CHARACTERISTICS METHOD TO THE
BOLTZMANN LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION -
Some numerical experiments by M.L. DEMURU

European Atomic Energy Community - EURATOM
Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy)
Scientific Information Processing Center-CETIS
Brussels, November 1967 - 70 Pages - 15 Figures - FB 100

The method of characteristics is applied to the linear integro-differential equation of Boltzmann in one and two-dimensional geometries.

In this report some numerical results are given in order to compare the method of characteristics with Carlson's S_n method.

EUR 3632 i

COMUNITÀ EUROPEA DELL'ENERGIA ATOMICA - EURATOM

**APPLICAZIONE DEL METODO DELLE CARATTERISTICHE
ALL'EQUAZIONE INTEGRO-DIFFERENZIALE
LINEARE DI BOLTZMANN -
Alcune esperienze numeriche**

di

M.L. DEMURU

1967



**Centro Comune di Ricerca Nucleare
Stabilimento di Ispra - Italia**

Centro di Trattamento dell'Informazione Scientifica - CETIS

RIASSUNTO

Il metodo delle caratteristiche viene applicato all'equazione integro-differenziale lineare di Boltzmann in geometrie mono e bi-dimensionali.

Si mostrano in questo rapporto alcune esperienze numeriche fatte per confrontare il metodo delle caratteristiche con il metodo S_n di Carlson.

PAROLE CHIAVE

TRANSPORT THEORY
DIFFERENTIAL EQUATIONS
NEUTRONS

SCATTERING
MATHEMATICS

Boltzmann equation, integral equations, Carlson method, geometry

APPLICAZIONE DEL METODO DELLE CARATTERISTICHE ALL'EQUAZIONE
INTEGRO-DIFFERENZIALE LINEARE DI BOLTZMANN

Alcune esperienze numeriche (x)

Introduzione

Mediante il metodo delle caratteristiche viene trattata l'equazione integro-differenziale lineare di Boltzmann, ad una velocità e con scattering isotropo nel sistema del laboratorio, nella geometria sferica, cilindrica infinita, cilindrica finita e rettangolare di altezza infinita.

Per quanto riguarda il problema agli autovalori si cerca il massimo autovalore in modulo e l'autosoluzione non-negativa corrispondente; per quanto riguarda il problema non omogeneo si cerca la soluzione in corrispondenza di un termine di sorgente prefissato.

Nel § 14 si mostrano le esperienze numeriche compiute e si fanno alcuni confronti tra le soluzioni di questi problemi ottenute col metodo delle caratteristiche e quelle ottenute col metodo S_n di Carlson [8].

Nei § 6 e 9 sono date le condizioni sufficienti per la convergenza dei procedimenti iterativi relativi ai metodi considerati.

(x) Manoscritto ricevuto il 10 Agosto 1967

1. Formulazione dei problemi

Prendiamo in esame l'equazione stazionaria del trasporto dei neutroni ad una velocità e nel caso di scattering isotropo nel sistema del laboratorio:

$$(1.1) \quad \underline{\Omega} \cdot \text{grad}_{\underline{P}} \Phi(\underline{P}, \underline{\Omega}) + \Sigma_t(\underline{P}) \Phi(\underline{P}, \underline{\Omega}) = \Sigma_s(\underline{P}) \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi(\underline{P}, \underline{\Omega}') d\Omega' + S(\underline{P})$$

\underline{P} è il vettore posizione che ha come campo di definizione un dominio G connesso in uno spazio tri-dimensionale, composto da un numero finito g di regioni R_g regolari, semplicemente connesse e disgiunte.

$\underline{\Omega}$ è un vettore unitario che individua la direzione della velocità dei neutroni e si muove sulla superficie della sfera unitaria Ω .

$\Phi(\underline{P}, \underline{\Omega})$ rappresenta il flusso dei neutroni in direzione $\underline{\Omega}$ attraverso l'unità di superficie normale ad $\underline{\Omega}$ nel punto \underline{P} del dominio G ,

$\Sigma_t(\underline{P})$ è la sezione d'urto macroscopica totale e

$\Sigma_s(\underline{P})$ è la sezione d'urto macroscopica di scattering.

Il termine di sorgente $S(\underline{P})$ che compare nel secondo membro dell'equazione (1.1) può assumere due forme dando origine a due differenti problemi:

Problema 1

$$(1.2) \quad S(\underline{P}) = \frac{1}{\lambda} \nu \Sigma_f(\underline{P}) \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi(\underline{P}, \underline{\Omega}') d\Omega'$$

dove $\Sigma_f(\underline{P})$ è la sezione d'urto macroscopica di fissione, ν è il numero medio di neutroni emessi per fissione e λ è uno scalare (autovalore).

Ricerchiamo il valore massimo (in modulo) di λ in corrispondenza del quale l'equazione (1.1) ammette una soluzione (autofunzione) non negativa.

Problema 2

$S(\underline{P})$ è una funzione nota non negativa che rappresenta fisicamente una sorgente di neutroni.

Ricerchiamo la soluzione dell'equazione (1.1) in corrispondenza di una sorgente $S(\underline{P})$ prefissata.

Si fa l'ipotesi che le sezioni d'urto considerate siano costanti in ogni regione R_g del dominio G .

L'equazione (1.1) è una equazione integro-differenziale, e per rendere il problema della sua soluzione determinato è necessario specificare delle condizioni al contorno e alle interfacce [1].

Condizioni alle interfacce

Se due mezzi sono a contatto direttamente il flusso che lascia un mezzo in direzione $\underline{\Omega}$ deve essere uguale al flusso che entra nel secondo mezzo nella stessa direzione $\underline{\Omega}$; analiticamente ciò si esprime

$$(1.3) \quad \Phi(\underline{P} + s\underline{\Omega}, \underline{\Omega}) \text{ continuo rispetto ad } s$$

per $\underline{P} + s\underline{\Omega}$ appartenente all'interfaccia. E' da notare che in generale anche $\Phi(\underline{P} + s\underline{\Omega}, \underline{\Omega}')$ risulta continuo rispetto ad s ma quest'ultima condizione non deve essere imposta altrimenti il problema potrebbe diventare sopra-determinato.

Condizioni al contorno

Se il mezzo in esame è di dimensioni finite imponiamo per semplicità che nessun neutrone entri nel mezzo dall'esterno, e cioè

$$(1.4) \quad \Phi(\underline{P}, \underline{\Omega}) = 0 \quad \underline{P} \text{ appartenente alla superficie esterna} \\ \text{ed } \underline{\Omega} \text{ entrante.}$$

Se invece il mezzo è infinito in una o più dimensioni si fa normalmente l'ipotesi che il numero di neutroni provenienti dall'infinito sia nullo.

Consideriamo la funzione $\Phi(\underline{P}, -\underline{\Omega})$ e scriviamo l'equazione a cui soddisfa [2]. Tenendo conto dell'eguaglianza

$$\int_{\Omega} \Phi(\underline{P}, \underline{\Omega}') d\Omega' = \int_{\Omega} \Phi(\underline{P}, -\underline{\Omega}') d\Omega'$$

dalla (1.1) si ricava facilmente

$$(1.5) \quad -\underline{\Omega} \cdot \text{grad}_{\underline{P}} \Phi(\underline{P}, -\underline{\Omega}) + \Sigma_t(\underline{P}) \Phi(\underline{P}, -\underline{\Omega}) = \Sigma_s(\underline{P}) \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi(\underline{P}, -\underline{\Omega}') d\Omega' + S(\underline{P})$$

Risulta evidente che l'equazione (1.5) è l'equazione aggiunta della (1.1), perciò in questo caso particolare (scattering isotropo) si ha l'identità:

$$(1.6) \quad \Phi^*(\underline{P}, \underline{\Omega}) = \Phi(\underline{P}, -\underline{\Omega})$$

Oltre ad una condizione alle interfacce del tutto analoga alla (1.3) vale per il flusso aggiunto la condizione al contorno

$$(1.7) \quad \Phi^*(\underline{P}, \underline{\Omega}) = 0 \quad \underline{P} \text{ appartenente alla superficie esterna} \\ \text{ed } \underline{\Omega} \text{ uscente}$$

2. Geometria sferica

Consideriamo una sfera di raggio R in cui il flusso neutronico dipenda dallo spazio solo attraverso il modulo r del vettore \underline{P} (simmetria sferica) e la direzione della velocità sia individuata dalla sola variabile

$$\mu = (\underline{P} \cdot \underline{\Omega}) / r.$$

L'equazione (1.1) assume la forma:

$$(2.1) \quad \mu \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial \mu} + \Sigma_t(r) \Phi(r, \mu) = \\ \Sigma_S(r) \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(r, \mu) d\mu + S(r)$$

con

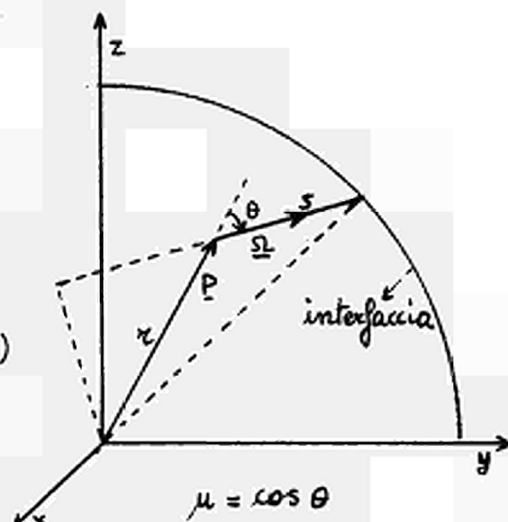
$$(2.2) \quad \begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ -1 &\leq \mu \leq 1 \end{aligned}$$

La condizione di continuità alle interfacce, come si ricava facilmente dalla figura, diventa

$$(2.3) \quad \Phi\left(\sqrt{r^2 + 2rs\mu + s^2}, \cos \operatorname{arctg} \frac{r\sqrt{1-\mu^2}}{r\mu + s}\right) \text{ continua rispetto ad } s \text{ per } \sqrt{r^2 + 2rs\mu + s^2} \text{ appartenente all'interfaccia}$$

e la condizione al contorno

$$(2.4) \quad \Phi(R, \mu) = 0 \quad \text{se} \quad -1 \leq \mu \leq 0$$



3. Metodo delle caratteristiche

Illustriamo il metodo proposto da Vladimirov [3] nel 1952 per la risoluzione dell'equazione del trasporto in simmetria sferica; questo metodo è basato sull'utilizzazione delle caratteristiche della parte differenziale dell'equazione integro-differenziale di Boltzmann.

Introduciamo le nuove variabili indipendenti

$$(3.1) \quad \begin{aligned} x &= r\mu \\ y &= r\sqrt{1-\mu^2} \end{aligned}$$

Il termine integrale che compare al secondo membro della (2.1), in virtù delle relazioni che legano le vecchie variabili alle nuove, e cioè

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \mu &= \cos \operatorname{artg} \frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

viene trasformato in

$$(3.2) \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(r, \mu) d\mu = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} \Phi\left(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{x'}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx' = \\ = \bar{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2})$$

Tenendo conto delle (3.1) e (3.2) l'equazione (2.1) diventa

$$(3.3) \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} + \Sigma_t(\sqrt{x^2+y^2}) \Phi(x, y) = \Sigma_s(\sqrt{x^2+y^2}) \bar{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2}) + S(\sqrt{x^2+y^2})$$

dove la soluzione della (3.3) è legata alla soluzione dell'equazione (2.1) nel seguente modo

$$(3.4) \quad \Phi(x,y) = \Phi(\sqrt{x^2+y^2}, \cos \operatorname{artg} \frac{y}{x})$$

La trasformazione (3.1) mette in luce che

$$y = \operatorname{cost}$$

rappresenta la famiglia di caratteristiche della parte differenziale dell'equazione (2.1).

Il campo di definizione delle nuove variabili viene ad essere costituito dal semicerchio

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x^2+y^2 &\leq R^2 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

La condizione di continuità alle interfacce (2.3), operando la trasformazione $h = r\mu + s$, diventa

$$\Phi(\sqrt{r^2(1-\mu^2)+h^2}, \cos \operatorname{artg} \frac{r\sqrt{1-\mu^2}}{h}) \quad \text{continua rispetto ad } h$$

e quindi per quanto riguarda la soluzione della (3.3) si ha

$$(3.6) \quad \Phi(x,y) \quad \text{continua rispetto ad } x$$

La condizione al contorno (2.4) a sua volta diventa

$$(3.7) \quad \Phi(-\sqrt{R^2-y^2}, y) = 0 \quad \text{per } 0 \leq y \leq R$$

Con una trattazione del tutto analoga, partendo dalla (1.5) si deduce che il flusso aggiunto $\Phi^*(x,y) = \Phi(-x,y)$ soddisfa l'equazione

$$(3.8) \quad -\frac{\partial \Phi^*(x,y)}{\partial x} + \Sigma_t(\sqrt{x^2+y^2})\Phi^*(x,y) = \Sigma_s(\sqrt{x^2+y^2})\bar{\Phi}^*(\sqrt{x^2+y^2}) + S(\sqrt{x^2+y^2})$$

dove

$$(3.9) \quad \bar{\Phi}^*(\sqrt{x^2+y^2}) = \bar{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} \left[\Phi(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{x'}{\sqrt{x^2+y^2}}) + \Phi^*(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{x'}{\sqrt{x^2+y^2}}) \right] dx'.$$

ed è soggetto alle condizioni

$$(3.10) \quad \Phi^*(x,y) \text{ continuo rispetto ad } x$$

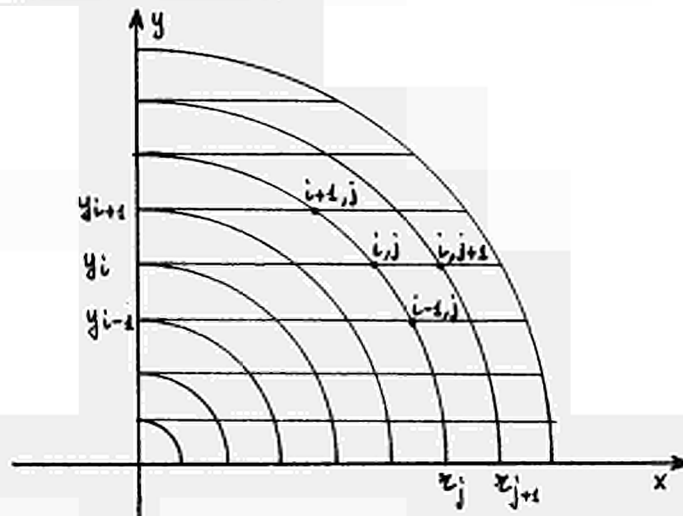
$$(3.11) \quad \Phi^*(\sqrt{R^2-y^2}, y) = 0 \quad \text{per } 0 \leq y \leq R$$

Nel risolvere il nostro problema possiamo valerci del particolare significato del flusso aggiunto; precisamente invece di cercare la soluzione della (3.3) in tutto il campo di definizione (3.5) conviene più semplicemente cercare la soluzione del sistema costituito dalle due equazioni (3.3) e (3.8) nel quarto di cerchio

$$(3.12) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq R^2 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno da abbinare a suddetto sistema sono costituite dalla (3.11) e dalla nuova condizione:

$$(3.13) \quad \Phi(0,y) = \Phi^*(0,y) \quad \text{per } 0 \leq y \leq R$$

4. Formule di approssimazione

Tracciamo nella regione di definizione (3.12) del problema i quarti di circonferenza $r = r_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) $r_1 = 0$ e $r_n = R$, le rette (caratteristiche) $y = y_i = r_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) e caratterizziamo i punti del reticolo così costruito mediante due indici (i, j) . Il punto generico (i, j) è generato dall'intersezione della caratteristica $y = y_i$ con il quarto di circonferenza $r = r_j$. In corrispondenza dell'indice i , il secondo indice j può assumere i valori $j = 1, i+1, \dots, n$.

Integriamo ora l'equazione (3.3) come una equazione differenziale ordinaria lungo la caratteristica i -esima fra il punto di ascissa $x_{i, j-1}$ e il punto di ascissa $x_{i, j}$.

Si ottiene

$$(4.1) \quad \Phi_{i, j} = \Phi_{i, j-1} e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i, j} - x_{i, j-1})} + \\ + \int_{x_{i, j-1}}^{x_{i, j}} e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i, j} - x)} \left[\Sigma_{s_{j-1/2}} \Phi(\sqrt{x^2 + y_i^2}) + S(\sqrt{x^2 + y_i^2}) \right] dx$$

dove $\Phi_{i, j}$ rappresenta il valore del flusso nel punto (i, j) e $\Sigma_{t_{j-1/2}}$ e $\Sigma_{s_{j-1/2}}$ rappresentano i valori delle sezioni

d'urto nell'intervallo considerato. E' evidente che le sezioni

d'urto dipendono soltanto dall'indice j dato che esse sono costanti in ogni regione radiale.

Facendo l'ipotesi che le funzioni $\bar{\Phi}$ ed S siano lineari nell'intervallo $x_{i,j-1} \leq x \leq x_{i,j}$ la (4.1) diventa

$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad \Phi_{i,j} = & \Phi_{i,j-1} e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} + \\
 & + \left[\Sigma_{s_{j-1/2}} \bar{\Phi}_j + S_j \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{j-1/2}}} \left[1 - \frac{1-e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})}}{\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} \right] + \\
 & + \left[\Sigma_{s_{j-1/2}} \bar{\Phi}_{j-1} + S_{j-1} \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{j-1/2}}} \left[\frac{1-e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})}}{\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} - \right. \\
 & \left. - e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} \right]
 \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo dalla (3.8) si ottiene per il flusso aggiunto:

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad \Phi_{i,j-1}^* = & \Phi_{i,j}^* e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} + \\
 & + \left[\Sigma_{s_{j-1/2}} \bar{\Phi}_j^* + S_j \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{j-1/2}}} \left[\frac{1-e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})}}{\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} - \right. \\
 & \left. - e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} \right] + \\
 & + \left[\Sigma_{s_{j-1/2}} \bar{\Phi}_{j-1}^* + S_{j-1} \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{j-1/2}}} \left[1 - \frac{1-e^{-\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})}}{\Sigma_{t_{j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} \right]
 \end{aligned}$$

Per determinare completamente la soluzione al sistema formato dalle formule ricorrenti (4.2) e (4.3) bisogna aggiungere le condizioni al contorno

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Phi_{i,n}^* &= 0 \\ \Phi_{i,i} &= \Phi_{i,i}^* \end{aligned}$$

Le formule (4.2) e (4.3) possono essere sostanzialmente semplificate approssimando gli esponenziali in modo opportuno. Ponendo infatti

$$(4.5) \quad e^{-a} = \frac{1 - \frac{a}{2}}{1 + \frac{a}{2}}$$

esse diventano rispettivamente

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \Phi_{i,j} &= \Phi_{i,j-1} \frac{1 - \frac{1}{2} \sum_{t_{j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})}{1 + \frac{1}{2} \sum_{t_{j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} + \\ &+ \left[\sum_{s_{j-1/2}} (\bar{\Phi}_j + \bar{\Phi}_{j-1}) + (S_j + S_{j-1}) \right] \frac{\frac{1}{2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})}{1 + \frac{1}{2} \sum_{t_{j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} \\ (4.7) \quad \Phi_{i,j-1}^* &= \Phi_{i,j}^* \frac{1 - \frac{1}{2} \sum_{t_{j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})}{1 + \frac{1}{2} \sum_{t_{j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} + \\ &+ \left[\sum_{s_{j-1/2}} (\bar{\Phi}_j^* + \bar{\Phi}_{j-1}^*) + (S_j + S_{j-1}) \right] \frac{\frac{1}{2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})}{1 + \frac{1}{2} \sum_{t_{j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} \end{aligned}$$

E' da notare che lo schema semplificato costituito dalle (4.6), (4.7) può essere ricavato direttamente dalle equazioni (3.3), (3.8) mediante il metodo delle differenze finite.

Il calcolo dei termini integrali $\bar{\Phi}_j = \bar{\Phi}_j^*$ che compaiono nei secondi membri delle equazioni precedenti viene effettuato con formule di quadratura:

$$(4.8) \quad \bar{\Phi}_j = \bar{\Phi}_j^* = \sum_{i=1}^j \beta_{i,j} (\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j}^*) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dove i coefficienti $\beta_{i,j}$ godono delle seguenti proprietà:

$$(4.9) \quad \sum_{i=1}^j \beta_{i,j} = \frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(4.10) \quad \beta_{i,j} > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n; i = 1, \dots, j)$$

Nel nostro caso abbiamo posto (regola trapezoidale)

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \beta_{i,j} &= \frac{1}{2r_j} \frac{x_{i-1,j} - x_{i+1,j}}{2} && \text{per } i \neq 1, i \neq j \\ \beta_{j,j} &= \frac{1}{2r_j} \frac{x_{j-1,j}}{2} && j \neq 1 \\ \beta_{1,j} &= \frac{1}{2r_j} \frac{r_j - x_{2,j}}{2} \end{aligned}$$

5. Metodo delle approssimazioni successive

Prendiamo in esame i sistemi formati dalle equazioni (4.2), (4.3) e (4.6), (4.7) unitamente alle condizioni (4.4.) valide per entrambi. Dato che al secondo membro di queste equazioni compaiono dei termini $\bar{\Phi}_j = \bar{\Phi}_j^*$ funzioni dei flussi e dei flussi aggiunti lungo il quarto di circonferenza di raggio r_j , uno dei modi per ottenere la soluzione del problema è di ricorrere al metodo delle approssimazioni successive.

Consideriamo separatamente i due problemi del § 1 :

Problema 2

Il termine di sorgente S_j è noto per ogni valore dell'indice j . In questo caso attribuito un valore iniziale arbitrario al flusso integrato sugli angoli ($\bar{\Phi}_j^0 = \bar{\Phi}_j^{*0}$) si può procedere al calcolo di una prima valutazione $\Phi_{i,j}^1$ e $\Phi_{i,j}^{*1}$ dei flussi e dei flussi aggiunti in tutti i punti del reticolo (prima iterazione).

Ogni caratteristica $y = y_i$ viene trattata separatamente. Si calcola dapprima il flusso aggiunto $\Phi_{i,j}^*$ partendo dal punto sul contorno (i,n) , dove $\Phi_{i,n}^*$ è noto, procedendo verso sinistra; poi partendo dal punto di indici (i,i) , dove vale la condizione di raccordo $\Phi_{i,i} = \Phi_{i,i}^*$, si calcola il flusso procedendo verso destra.

Le formule di quadratura (4.8) danno la nuova valutazione del flusso integrato.

All'iterazione $(m+1)$ -esima si ha perciò:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{i,j-1}^{*m+1} &= \Phi_{i,j}^{*m+1} p_{i,j} + \left[\sum_{S_{j-1/2}} \bar{\Phi}_j^{*m} + S_j \right] \alpha_{i,j} + \\
 &+ \left[\sum_{S_{j-1/2}} \bar{\Phi}_{j-1}^{*m} + S_{j-1} \right] \gamma_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{i,j}^{m+1} = & \Phi_{i,j-1}^{m+1} p_{i,j} + \left[\sum_{s_{i-1}/2} \Phi_{j-1}^m + S_{j-1} \right] \alpha_{i,j} + \\ & + \left[\sum_{s_{j-1}/2} \bar{\Phi}_j^m + S_j \right] \gamma_{i,j} \end{aligned}$$

dove i coefficienti p , α e γ dipendono dal sistema che si considera e

$$(5.2) \quad \bar{\Phi}_j^m = \bar{\Phi}_j^{*m} = \sum_{i=1}^j \beta_{i,j} (\Phi_{i,j}^m + \Phi_{i,j}^{*m}) \quad (j=1,2,\dots,n)$$

Il procedimento prosegue finchè non si sia raggiunta la convergenza.

Problema 1

La risoluzione di questo problema richiede due tipi di iterazioni: interne ed esterne.

Dato che il termine di sorgente è funzione dei flussi, dei flussi aggiunti e del parametro (autovalore) λ è necessario attribuire un valore iniziale arbitrario non solo ai flussi integrati ma anche all'autovalore.

Durante ogni iterazione esterna il termine di sorgente

$$(5.3) \quad S^e = \frac{1}{\lambda^e} \vee \sum_f \bar{\Phi}^e$$

è mantenuto costante mentre viene effettuato un certo numero di iterazioni interne del tutto analoghe a quelle relative al problema 2.

In seguito viene calcolato il nuovo valore approssimato di λ secondo la formula

$$(5.4) \quad \lambda^{e+1} = \lambda^e \frac{\sum_{s=1}^{n-1} \Sigma_{f_{s+1/2}} (\bar{\Phi}_s^{e+1} + \bar{\Phi}_{s+1}^{e+1}) V_{s+1/2}}{\sum_{s=1}^{n-1} \Sigma_{f_{s+1/2}} (\bar{\Phi}_s^e + \bar{\Phi}_{s+1}^e) V_{s+1/2}}$$

dove $V_{s+1/2}$ rappresenta il volume compreso fra le due sfere di raggi r_s e r_{s+1} .

6. Convergenza dei procedimenti iterativi

Esaminiamo sotto quali condizioni i procedimenti iterativi considerati convergono.

Costruiamo in corrispondenza della caratteristica $y = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) il vettore $\tilde{\Phi}_i$ costituito da tutti i flussi aggiunti e flussi relativi a suddetta caratteristica nell'ordine in cui vengono calcolati nel procedimento numerico, e precisamente

$$(6.1) \quad \tilde{\Phi}_i = \begin{pmatrix} \Phi_{i,n}^* \\ \Phi_{i,n-1}^* \\ \vdots \\ \Phi_{i,i}^* \\ \Phi_{i,i} \\ \vdots \\ \Phi_{i,n-1} \\ \Phi_{i,n} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Costruiamo in seguito il vettore

$$(6.2) \quad \Phi = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_n \\ \tilde{\Phi}_{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{\Phi}_1 \end{pmatrix}.$$

Lo schema iterativo inerente al sistema formato dalle equazioni (4.2), (4.3) con le condizioni (4.4) può quindi essere scritto in forma matriciale

$$(6.3) \quad A\Phi^{n+1} = B\Phi^n + S$$

$$(6.7) \quad B = \begin{pmatrix} B_{n,n} & B_{n,n-1} & \cdots & B_{n,1} \\ B_{n-1,n} & B_{n-1,n-1} & \cdots & B_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1,n} & B_{1,n-1} & \cdots & B_{1,1} \end{pmatrix}$$

Le submatrici $B_{i,j}$ sono costituite da $2(n-i+1)$ righe e $2(n-j+1)$ colonne ed hanno la seguente forma

$$(6.8) \quad B_{n,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$(6.9) \quad B_{i,j} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ y_{i,n,j} & z_{i,n,j} & & & & & z_{i,n,j} & y_{i,n,j} \\ & y_{i,n-1,j} & z_{i,n-1,j} & & & & z_{i,n-1,j} & y_{i,n-1,j} \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots \\ & \bar{z}_{i,n-1,j} & \bar{y}_{i,n-1,j} & & & & \bar{y}_{i,n-1,j} & \bar{z}_{i,n-1,j} \\ \bar{z}_{i,n,j} & \bar{y}_{i,n,j} & & & & & \bar{y}_{i,n,j} & \bar{z}_{i,n,j} \end{array} \right)$$

dove è stato posto

$$(6.10) \quad \begin{aligned} y_{i,1,j} &= \frac{\sum_{s_{1-1/2}}}{\sum_{t_{1-1/2}}} \left[\frac{1 - p_{i,1}}{\sum_{t_{1-1/2}} (x_{i,1} - x_{i,1-1})} - p_{i,1} \right] \beta_{j,1} \\ z_{i,1,j} &= \frac{\sum_{s_{1-1/2}}}{\sum_{t_{1-1/2}}} \left[1 - \frac{1 - p_{i,1}}{\sum_{t_{1-1/2}} (x_{i,1} - x_{i,1-1})} \right] \beta_{j,1-1} \\ \bar{y}_{i,1,j} &= \frac{\sum_{s_{1-1/2}}}{\sum_{t_{1-1/2}}} \left[\frac{1 - p_{i,1}}{\sum_{t_{1-1/2}} (x_{i,1} - x_{i,1-1})} - p_{i,1} \right] \beta_{j,1-1} \\ \bar{z}_{i,1,j} &= \frac{\sum_{s_{1-1/2}}}{\sum_{t_{1-1/2}}} \left[1 - \frac{1 - p_{i,1}}{\sum_{t_{1-1/2}} (x_{i,1} - x_{i,1-1})} \right] \beta_{i,1} \end{aligned}$$

Notiamo che le due funzioni $f(a) = \frac{1-e^{-a}}{a} - e^{-a}$ e $g(a) = 1 - \frac{1-e^{-a}}{a}$ sono positive e limitate; precisamente

$$(6.11) \quad \begin{aligned} 0 \leq f(a) \leq 1 \\ 0 \leq g(a) \leq 1 \end{aligned} \quad \text{per } 0 \leq a < \infty$$

Tenendo presente le (4.9) e (4.10) si vede che tutti gli elementi della matrice B sono nulli oppure positivi ed inferiori ad $\frac{1}{2}$. Ne segue che

$$(6.12) \quad B \geq 0$$

Matrice A-B

Gli elementi al di fuori della diagonale principale della matrice A-B sono negativi o nulli.

Gli elementi appartenenti alla diagonale principale possono essere di tre tipi:

$$(6.13) \quad 1, 1-z_{i,1,j} \quad \text{oppure} \quad 1-\bar{z}_{i,1,j}$$

per quanto è stato detto in precedenza essi sono positivi, inoltre essi sono dominanti. Infatti calcoliamo la somma dei moduli degli elementi al di fuori della diagonale principale; agli elementi unitari corrisponde una somma S uguale a zero oppure a 1. Perciò

$$(6.14) \quad S \leq 1$$

Agli elementi di tipo $1 - z_{i,1,j}$ corrisponde una somma $S_{i,1,j}$ data da:

$$S_{i,1,j} = 2 \sum_{s=1}^1 y_{i,1,s} + 2 \sum_{s=1}^{1-1} z_{i,1,s} - z_{i,1,j} + p_{i,1}$$

e agli elementi di tipo $1-\bar{z}_{i,1,j}$ una somma $\bar{S}_{i,1,j}$:

$$\bar{S}_{i,1,j} = 2 \sum_{s=1}^{l-1} \bar{y}_{i,1,s} + 2 \sum_{s=1}^1 \bar{z}_{i,1,s} - \bar{z}_{i,1,j} + p_{i,1}$$

valendosi delle (6.10) e delle (4.9) si ottiene:

$$(6.15) \quad S_{i,1,j} \leq 1 - z_{i,1,j} ; \bar{S}_{i,1,j} \leq 1 - \bar{z}_{i,1,j}$$

Si conclude quindi che

$$(6.16) \quad (A-B)^{-1} \geq 0$$

Riferendosi ad un noto teorema [4, pag.89] vediamo che tutte le condizioni richieste da quest'ultimo sono verificate; si può perciò affermare che il metodo iterativo relativo al sistema formato dalle equazioni (4.2), (4.3) con le condizioni (4.4) è convergente qualunque sia il valore iniziale arbitrario attribuito al flusso.

Una trattazione analoga applicata al sistema formato dalle equazioni semplificate (4.6), (4.7) con le condizioni (4.4) porta invece ad una condizione sufficiente per la convergenza, e precisamente

$$\text{Max}_{i,j} [\sum_{t=j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})] \leq 2$$

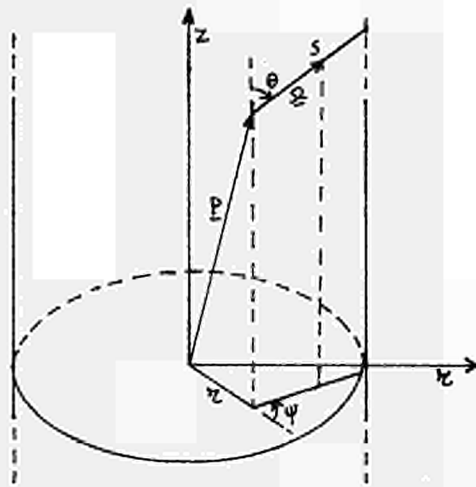
Questa condizione nasce dall'imporre che gli elementi al di fuori della diagonale principale della matrice A diversi da zero siano negativi.

7. Geometria cilindrica infinita

Passiamo a risolvere con il metodo delle caratteristiche l'equazione del trasporto dei neutroni ad una velocità e con scattering isotropo nel sistema del laboratorio in geometria cilindrica infinita.

La generalizzazione del metodo di Vladimirov per geometrie con simmetria assiale è dovuta a Gavrilin [3].

Prendiamo perciò in esame un cilindro di altezza infinita e raggio R dotato di simmetria assiale; è noto che l'equazione (1.1) prende la forma



$$(7.1) \quad \sin \theta \left[\cos \psi \frac{\partial \Phi(r, \theta, \psi)}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta, \psi)}{\partial \psi} \right] + \Sigma_t(r) \Phi(r, \theta, \psi) = \\ = \Sigma_s(r) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \Phi(r, \theta', \psi') + S(r)$$

dove il campo di definizione delle variabili è individuato da

$$(7.2) \quad \begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \psi \leq 2\pi \end{aligned}$$

La condizione di continuità alle interfacce diventa

$$(7.3) \quad \Phi(\sqrt{r^2 + 2rs \sin \theta \cos \psi + s^2 \sin^2 \theta}, \theta, \text{artg} \frac{r \sin \psi}{r \cos \psi + s \sin \theta})$$

continuo rispetto ad s
e la condizione al contorno

$$(7.4) \quad \Phi(R, \vartheta, \psi) = 0 \quad -1 \leq \cos \psi \leq 0$$

Se teniamo conto delle proprietà di simmetria relative alla geometria considerata, e precisamente

$$(7.5) \quad \Phi(r, \vartheta, \psi) = \Phi(r, \pi - \vartheta, \psi) = \Phi(r, \vartheta, 2\pi - \psi)$$

si vede che il termine integrale che compare al secondo membro dell'equazione (7.1) si riduce a

$$(7.6) \quad \bar{\Phi}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi' \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta' d\vartheta' \Phi(r, \vartheta', \psi')$$

Con lo scopo di rendere la parte differenziale della (7.1) formalmente simile a quella relativa alla geometria sferica, operiamo il cambiamento di variabili

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \mu &= \cos \psi \\ \gamma &= \cos \vartheta \end{aligned}$$

Si ottiene

$$(7.8) \quad \sqrt{1-\gamma^2} \left[\mu \frac{\partial \Phi(r, \gamma, \mu)}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \Phi(r, \gamma, \mu)}{\partial \mu} \right] + \Sigma_t(r) \Phi(r, \gamma, \mu) = \\ = \Sigma_s(r) \bar{\Phi}(r) + S(r)$$

dove per semplicità si è posto $\Phi(r, \gamma, \mu) \equiv \Phi(r, \vartheta, \psi)$ e

$$(7.9) \quad \bar{\Phi}(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} \int_0^1 \Phi(r, \gamma', \mu') d\gamma' = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-\mu'^2}} \int_0^1 \left[\Phi(r, \gamma', \mu') + \Phi(r, \gamma', -\mu') \right]$$

Scegliamo in modo opportuno nell'intervallo $0 \leq \gamma \leq 1$ un numero finito K di punti nodali γ_k che, ad esempio, possono

essere i punti corrispondenti alla formula di quadratura di Gauss.

Coumunque in corrispondenza di un valore $\gamma = \gamma_k$ la soluzione della (7.8) dipende solo dalle variabili r e μ ; ponendo

$$\bar{\Phi}_k(r, \mu) = \bar{\Phi}(r, \gamma_k, \mu), \quad \Sigma_k = \Sigma / \sqrt{1 - \gamma_k^2} \quad \text{e} \quad S_k = S / \sqrt{1 - \gamma_k^2} \quad \text{si ha}$$

$$(7.10) \quad \mu \frac{\partial \bar{\Phi}_k(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \bar{\Phi}_k(r, \mu)}{\partial \mu} + \Sigma_{t_k}(r) \bar{\Phi}_k(r, \mu) = \Sigma_{S_k}(r) \bar{\Phi}(r) + S_k(r)$$

$$(k = 1, 2, \dots, K)$$

Ogni equazione del sistema (7.10) è formalmente simile all'equazione valida in geometria sferica e può essere integrata numericamente in modo del tutto analogo.

8. Formule di approssimazione

Le formule ricorrenti, analoghe alle (4.2) e (4.3), a cui si perviene sono :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{k,i,j} &= \Phi_{k,i,j-1} p_{k,i,j} + \\
 &+ \left[\Sigma_{s_{k,j-1/2}} \bar{\Phi}_j + S_{k,j} \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}}} \left[1 - \frac{1 - p_{k,i,j}}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} \right] + \\
 &+ \left[\Sigma_{s_{k,j-1/2}} \bar{\Phi}_{j-1} + S_{k,j-1} \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}}} \left[\frac{1 - p_{k,i,j}}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} - \right. \\
 &\left. - p_{k,i,j} \right]
 \end{aligned}$$

(8.1)

$$\begin{aligned}
 \Phi_{k,i,j-1}^* &= \Phi_{k,i,j}^* p_{k,i,j} + \\
 &+ \left[\Sigma_{s_{k,j-1/2}} \bar{\Phi}_j + S_{k,j} \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}}} \left[\frac{1 - p_{k,i,j}}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} - p_{k,i,j} \right] \\
 &+ \left[\Sigma_{s_{k,j-1/2}} \bar{\Phi}_{j-1} + S_{k,j-1} \right] \frac{1}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}}} \left[1 - \frac{1 - p_{k,i,j}}{\Sigma_{t_{k,j-1/2}} (x_{i,j} - x_{i,j-1})} \right]
 \end{aligned}$$

(i = 1, 2, ..., n-1; j=i+1, i+2, ..., n; k = 1, 2, ..., k)

dove l'indice k caratterizza la dipendenza da γ_k .

E' da rilevare che in questo caso $\Phi_{k,i,j}^*$ non ha più il significato di flusso aggiunto, vale semplicemente la relazione

$$(8.2) \quad \Phi_{k,i,j}^* = \Phi_k^*(x_{i,j}, y_i) = \Phi_k^*(-x_{i,j}, y_i)$$

Si procede al calcolo dei termini integrali $\bar{\Phi}_j$ mediante formule di quadratura:

$$(8.3) \quad \bar{\Phi}_j = \sum_{k=1}^K \alpha_k \bar{\Phi}_{k,j} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dove i coefficienti α_k godono delle seguenti proprietà:

$$(8.4) \quad \alpha_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

e

$$(8.5) \quad \sum_{k=1}^K \alpha_k = 1$$

Nel caso in cui si suddivida l'intervallo $0 \leq \gamma \leq 1$ in K intervalli uguali si pone

$$(8.6) \quad \alpha_k = \frac{1}{K} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

mentre nel caso in cui ci si valga della formula di Gauss gli α_k sono i pesi relativi agli zeri dei polinomi di Legendre.

Abbiamo posto inoltre

$$\bar{\Phi}_{k,1} = \beta'_{11} (\Phi_{k,1,1} + \Phi_{k,1,1}^*) \quad \text{dove} \quad \beta'_{1,1} = \frac{1}{2}$$

(8.7)

$$\bar{\Phi}_{k,j} = \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^j \int_{x_{i,j}}^{x_{i-1,j}} \frac{dx}{\sqrt{r_j^2 - x^2}} \left[\Phi_k(x, \sqrt{r_j^2 - x^2}) + \Phi_k^*(x, \sqrt{r_j^2 - x^2}) \right]$$

(j = 2, 3, \dots, n)

Supponendo $\Phi_k(x, \sqrt{r_j^2 - x^2})$ e $\Phi_k^*(x, \sqrt{r_j^2 - x^2})$ lineari negli intervalli considerati si ottiene

$$\begin{aligned}
\Phi_{k,j} &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=2}^j \left\{ \left[\Phi_{k,i,j} + \Phi_{k,i,j}^* \right] \delta_{i,j} + \left[\Phi_{k,i-1,j} + \Phi_{k,i-1,j}^* \right] \sigma_{i-1,j} \right\} = \\
(8.8) \quad &= \sum_{i=1}^j \left[\Phi_{k,i,j} + \Phi_{k,i,j}^* \right] \beta'_{i,j}
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\sigma_{i-1,j} &= \frac{1}{x_{i-1,j} - x_{i,j}} \left\{ \sqrt{r_j^2 - x_{i,j}^2} - \sqrt{r_j^2 - x_{i-1,j}^2} - \right. \\
&\quad \left. - x_{i,j} \left[\operatorname{artg} \frac{x_{i-1,j}}{\sqrt{r_j^2 - x_{i-1,j}^2}} - \operatorname{artg} \frac{x_{i,j}}{\sqrt{r_j^2 - x_{i,j}^2}} \right] \right\} \\
(8.9) \quad \delta_{i,j} &= \frac{-1}{x_{i-1,j} - x_{i,j}} \left\{ \sqrt{r_j^2 - x_{i,j}^2} - \sqrt{r_j^2 - x_{i-1,j}^2} - \right. \\
&\quad \left. - x_{i-1,j} \left[\operatorname{artg} \frac{x_{i-1,j}}{\sqrt{r_j^2 - x_{i-1,j}^2}} - \operatorname{artg} \frac{x_{i,j}}{\sqrt{r_j^2 - x_{i,j}^2}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta'_{1,j} &= \frac{1}{\pi} \sigma_{1,j} \\
(8.10) \quad \beta'_{i,j} &= \frac{1}{\pi} (\delta_{i,j} + \sigma_{i,j}) \quad \text{per } i = 2, 3, \dots, j-1 \quad (j=2, 3, \dots, n) \\
\beta'_{j,j} &= \frac{1}{\pi} \delta_{j,j}
\end{aligned}$$

I coefficienti $\beta'_{i,j}$ godono delle seguenti proprietà:

$$(8.11) \quad \beta'_{i,j} > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, j)$$

perchè integrali di funzioni positive, e

$$(8.12) \quad \sum_{i=1}^j \beta'_{i,j} = \frac{1}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Come conseguenza della condizione di continuità alle interfacce (7.3) si ha che per ogni valore γ_k di γ i flussi $\Phi_{k,i,j}$ e $\Phi_{k,i,j}^*$ sono continui lungo ogni caratteristica $y = y_i$.

Lo schema semplificato che si deduce dal sistema (8.1) è dato da

$$\begin{aligned}
 \Phi_{k,i,j} &= \Phi_{k,i,j-1} \frac{1-1/2\Sigma_{t_{k,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})}{1+1/2\Sigma_{t_{k,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} + \\
 &+ \left[\Sigma_{s_{k,j-1/2}}(\bar{\Phi}_j + \bar{\Phi}_{j-1}) + S_{k,j} + S_{k,j-1} \right] \frac{1/2(x_{i,j}-x_{i,j-1})}{1+1/2\Sigma_{t_{k,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} \\
 (8.13) \quad \Phi_{k,i,j-1}^* &= \Phi_{k,i,j}^* \frac{1-1/2\Sigma_{t_{k,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})}{1+1/2\Sigma_{t_{k,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} + \\
 &+ \left[\Sigma_{s_{k,j-1/2}}(\bar{\Phi}_j + \bar{\Phi}_{j-1}) + S_{k,j} + S_{k,j-1} \right] \frac{1/2(x_{i,j}-x_{i,j-1})}{1+1/2\Sigma_{t_{k,j-1/2}}(x_{i,j}-x_{i,j-1})} \\
 &(i = 1, 2, \dots, n-1; j=i+1, i+2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, K)
 \end{aligned}$$

Sia al sistema (8.1) che al sistema (8.13) vanno abbinate le condizioni al contorno

$$\begin{aligned}
 \Phi_{k,i,n}^* &= 0 \\
 (8.14) \quad \Phi_{k,i,i} &= \Phi_{k,i,i}^* \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, K)
 \end{aligned}$$

Analogamente a quanto è stato fatto in geometria sferica per la risoluzione dei sistemi (8.1), (8.13) ci si vale di tecniche iterative.

9. Convergenza dei procedimenti iterativi

Data l'analogia formale stabilita fra le equazioni valide in geometria cilindrica infinita e quelle valide in geometria sferica, possiamo basarci per l'analisi di convergenza dei procedimenti iterativi su quanto è già stato stabilito nel § 6.

In corrispondenza di ogni valore γ_k di γ ($k=1,2,\dots,K$) costruiamo un vettore Φ^k del tutto simile a quello dato dalla (6.2).

Il sistema (8.1) con associato le condizioni (8.13) può venire scritto in forma più compatta

$$(9.1) \quad A^k \Phi^k = B^k \sum_{s=1}^K \alpha_s \Phi^s + S^k \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

dove S^k è il vettore che rappresenta il termine di sorgente. Le matrici A^k ($k=1,2,\dots,K$) si differenziano dalla matrice A data dalla (6.4) solo per il fatto che troviamo gli elementi $p_{i,j}^k = \exp[-\sum_{t_k, j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})]$ al posto degli elementi $p_{i,j}$; esse godono quindi delle stesse proprietà di A :

$$(9.2) \quad (A^k)^{-1} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

Le matrici B^k , anche se l'integrazione sulla variabile μ è diversa in geometria cilindrica sono analoghe alla matrice B data dalla (6.7) nel senso che ad elementi nulli della matrice B corrispondano in egual posizione elementi nulli nelle matrici B^k e agli elementi positivi $y_{i,l,j}$, $\bar{y}_{i,l,j}$ e $z_{i,l,j}$, $\bar{z}_{i,l,j}$ corrispondono gli elementi positivi $y_{i,l,j}^k$, $\bar{y}_{i,l,j}^k$ e $z_{i,l,j}^k$, $\bar{z}_{i,l,j}^k$:
dove

$$y_{i,l,j}^k = \frac{\sum_{s_{k,l-1/2}}}{\sum_{t_{k,l-1/2}}} \left[\frac{1 - p_{i,l}^k}{\sum_{t_{k,l-1/2}} (x_{i,l} - x_{i,l-1})} - p_{i,l}^k \right] \beta'_{j,l}$$

$$z_{i,l,j}^k = \frac{\sum_{s_{k,l-1/2}}}{\sum_{t_{k,l-1/2}}} \left[1 - \frac{1 - p_{i,l}^k}{\sum_{t_{k,l-1/2}} (x_{i,l} - x_{i,l-1})} \right] \beta'_{j,l-1}$$

$$(9.3) \quad y_{i,1,j}^k = \frac{\Sigma_{s_{k,1-1/2}}}{\Sigma_{t_{k,1-1/2}}} \left[\frac{1-p_{i,1}^k}{\Sigma_{t_{k,1-1/2}} (x_{i,1} - x_{i,1-1})} - p_{i,1}^k \right] \beta_{j,1-1}^k$$

$$z_{i,1,j}^k = \frac{\Sigma_{s_{k,1-1/2}}}{\Sigma_{t_{k,1-1/2}}} \left[1 - \frac{1-p_{i,1}^k}{\Sigma_{t_{k,1-1/2}} (x_{i,1} - x_{i,1-1})} \right] \beta_{j,1}^k$$

ne segue che

$$(9.4) \quad B^k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

Costruiamo un nuovo vettore Φ' nel modo seguente:

$$(9.5) \quad \Phi' = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Phi^K \end{pmatrix}$$

la matrice diagonale a blocchi

$$(9.6) \quad A' = \begin{pmatrix} A^1 & \dots & & & \\ & A^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A^K \end{pmatrix}$$

che, tenuto conto della (9.2), gode della proprietà

$$(9.7) \quad (A')^{-1} \geq 0$$

e infine la matrice

$$(9.8) \quad B' = \begin{pmatrix} \alpha_1 B^1 & \alpha_2 B^1 & \dots & \alpha_K B^1 \\ \alpha_1 B^2 & \alpha_2 B^2 & \dots & \alpha_K B^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 B^K & \alpha_2 B^K & \dots & \alpha_K B^K \end{pmatrix}$$

Valendosi delle (9.4) e (8.4) si deduce che

$$(9.9) \quad B' \geq 0$$

Il sistema (9.1) assume quindi la forma

$$(9.10) \quad A' \Phi' = B' \Phi' + S'$$

dove S' è il vettore relativo ai termini di sorgente

Restano da esaminare le proprietà della matrice $A' - B'$.

Si vede facilmente che la matrice $A' - B'$ ha tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale negativi o nulli. Per quanto riguarda gli elementi della diagonale principale essi sono di **tre** tipi

$$(9.11) \quad 1, 1 - \alpha_{k i, 1, j}^k \quad \text{oppure} \quad 1 - \alpha_{k \bar{z} i, 1, j}^k$$

Calcoliamo le somme dei moduli degli elementi della matrice $A' - B'$ al di fuori della diagonale principale: in corrispondenza degli elementi unitari si ottiene una somma S uguale a zero oppure a 1, perciò

$$(9.12) \quad S \leq 1$$

in corrispondenza degli elementi $1 - \alpha_{k i, 1, j}^k$ si ottiene una somma $S_{i, 1, j}^k$ data da

$$S_{i,1,j}^k = \sum_{s=1}^K \alpha_s \left\{ 2 \sum_{t=1}^1 y_{i,1,t}^k + 2 \sum_{t=1}^{1-1} z_{i,1,t}^k \right\} - \alpha_k z_{i,1,j}^k + p_{i,1}^k$$

e in corrispondenza degli elementi $1 - \bar{z}_{i,1,j}^k$ una somma $\bar{S}_{i,1,j}^k$:

$$\bar{S}_{i,1,j}^k = \sum_{s=1}^K \alpha_s \left\{ 2 \sum_{t=1}^{1-1} \bar{y}_{i,1,t}^k + 2 \sum_{t=1}^1 \bar{z}_{i,1,t}^k \right\} - \alpha_k \bar{z}_{i,1,j}^k + p_{i,1}^k$$

Come conseguenza delle (8.5), (9.3) e delle (8.12) si ha

$$(9.13) \quad S_{i,1,j}^k \leq 1 - \alpha_k z_{i,1,j}^k, \quad \bar{S}_{i,1,j}^k \leq 1 - \alpha_k \bar{z}_{i,1,j}^k$$

Gli elementi della diagonale principale della matrice $A' - B'$ sono perciò positivi e dominanti e la matrice $A' - B'$ gode della proprietà

$$(9.14) \quad (A' - B')^{-1} \geq 0$$

Si conclude che il procedimento iterativo relativo al metodo considerato è convergente. Per quanto riguarda il sistema semplificato costituito dalle equazioni (8.12) e dalle condizioni (8.13) una trattazione analoga porta ad affermare che condizione sufficiente per la convergenza è che

$$(9.15) \quad \text{Max}_{i,j,k} \frac{\sum_{s,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}} \leq 2$$

condizione quest'ultima che nasce dall'imporre che gli elementi della matrice A' al di fuori della diagonale principale siano negativi.

10. Geometria cilindrica finita

Prendiamo in esame un cilindro di altezza finita Z dotato di simmetria assiale. In questa geometria la dipendenza spaziale del flusso avviene oltre che attraverso la variabile r anche attraverso la variabile z , mentre la direzione $\underline{\Omega}$ della velocità è individuata come in geometria cilindrica infinita dagli angoli ϑ e ψ .

L'equazione (1.1) assume la forma:

$$\sin \vartheta \left[\cos \psi \frac{\partial \Phi(r, z, \vartheta, \psi)}{\partial r} - \frac{\sin \psi}{r} \frac{\partial \Phi(r, z, \vartheta, \psi)}{\partial \psi} \right] +$$

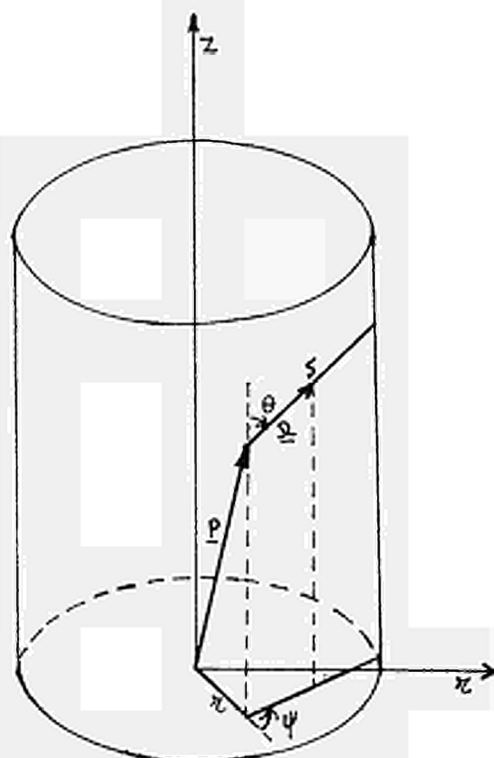
$$+ \cos \vartheta \frac{\partial \Phi(r, z, \vartheta, \psi)}{\partial z} + \Sigma_t(r, z) \Phi(r, z, \vartheta, \psi) =$$

$$(10.1) \quad = \Sigma_s(r, z) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \Phi(r, z, \vartheta', \psi') + S(r, z)$$

dove il campo di definizione delle variabili è

$$(10.2) \quad \begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq z \leq Z \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\ 0 &\leq \psi \leq 2\pi \end{aligned}$$

e la condizione al contorno è espressa da



$$\begin{aligned}
 & \Phi(R, z, \theta, \psi) = 0 \quad \text{se } -1 \leq \cos \psi \leq 0 \\
 (10.3) \quad & \Phi(r, 0, \theta, \psi) = 0 \quad \text{se } 0 \leq \cos \theta \leq 1 \\
 & \Phi(r, Z, \theta, \psi) = 0 \quad \text{se } -1 \leq \cos \theta \leq 0
 \end{aligned}$$

Basandosi sulla figura si deduce facilmente la condizione di continuità alle interfacce:

$$\begin{aligned}
 (10.4) \quad & \overline{\Phi(\sqrt{r^2 + 2rs \sin \theta \cos \psi + s^2 \sin^2 \theta}, z + s \cos \theta, \theta, \psi)} \\
 & \text{artg} \left(\frac{r \sin \psi}{r \cos \psi + s \sin \theta} \right) \text{ continuo rispetto ad } s
 \end{aligned}$$

Procedendo come per il cilindro infinito si arriva al sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
 (10.5) \quad & \mu \frac{\partial \Phi_k(r, z, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \Phi_k(r, z, \mu)}{\partial \mu} + \frac{\gamma_k}{\sqrt{1 - \gamma_k^2}} \frac{\partial \Phi_k(r, z, \mu)}{\partial z} + \\
 & + \sum_{t_k} (r, z) \Phi_k(r, z, \mu) = \sum_{s_k} (r, z) \bar{\Phi}(r, z) + S_k(r, z) \quad (k=1, 2, \dots, K)
 \end{aligned}$$

dove la variabile γ è stata discretizzata nel modo seguente:

$$(10.6) \quad -1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{K/2} < 0 < \gamma_{K/2+1} < \dots < \gamma_K < 1 \quad (K \text{ pari})$$

e $\bar{\Phi}(r, z)$ è dato da

$$\begin{aligned}
 (10.7) \quad & \bar{\Phi}(r, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \Phi(r, z, \theta', \psi') = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\psi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \Phi(r, z, \theta', \psi') = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\gamma' \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu'}{\sqrt{1 - \mu'^2}} \Phi(r, z, \gamma', \mu') = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^K \alpha_k \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu'}{\sqrt{1 - \mu'^2}} \Phi_k(r, z, \mu')
 \end{aligned}$$

In quest'ultima formula si è fatto uso della proprietà di simmetria relativa alla geometria considerata, e cioè

$$(10.8) \quad \Phi(r, z, \vartheta, \psi) = \Phi(r, z, \vartheta, 2\pi - \psi)$$

I coefficienti α_k sono i pesi relativi ai valori γ_k di γ ; sono positivi e soddisfano alla relazione

$$(10.9) \quad \sum_{k=1}^K \alpha_k = 2$$

A questo punto operiamo il cambiamento di variabili dato dalle (3.1); il sistema (10.5) viene trasformato in

$$(10.10) \quad \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\gamma_k}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial z} + \sum_{t_k} (\sqrt{x^2+y^2}, z) \Phi_k(x, y, z) =$$

$$= \sum_{s_k} (\sqrt{x^2+y^2}, z) \bar{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2}, z) + S_k(\sqrt{x^2+y^2}, z) \quad (k=1, 2, \dots, K)$$

11. Metodo globale delle caratteristiche

Si presenta ora il problema di integrare numericamente l'operatore differenziale che compare al primo membro delle equazioni del sistema (10.10).

Tale problema può essere superato in vari modi ; quello che si presenta forse più spontaneo è suggerito dalla condizione di continuità alle interfacce (10.4). Precisamente l'integrazione viene effettuata lungo le traiettorie dei neutroni, che costituiscono linee caratteristiche dell'operatore differenziale. Lungo queste direzioni la condizione (10.4) impone che il flusso sia continuo.

Questo metodo viene inoltre suggerito da R.D. Richmyer [5] per risolvere l'equazione del trasporto non-stazionaria ad una velocità, con scattering isotropo, in geometria sferica, di una equazione quindi formalmente simile alle (10.5).

Le linee caratteristiche delle equazioni (10.10) costituiscono delle famiglie di rette date da:

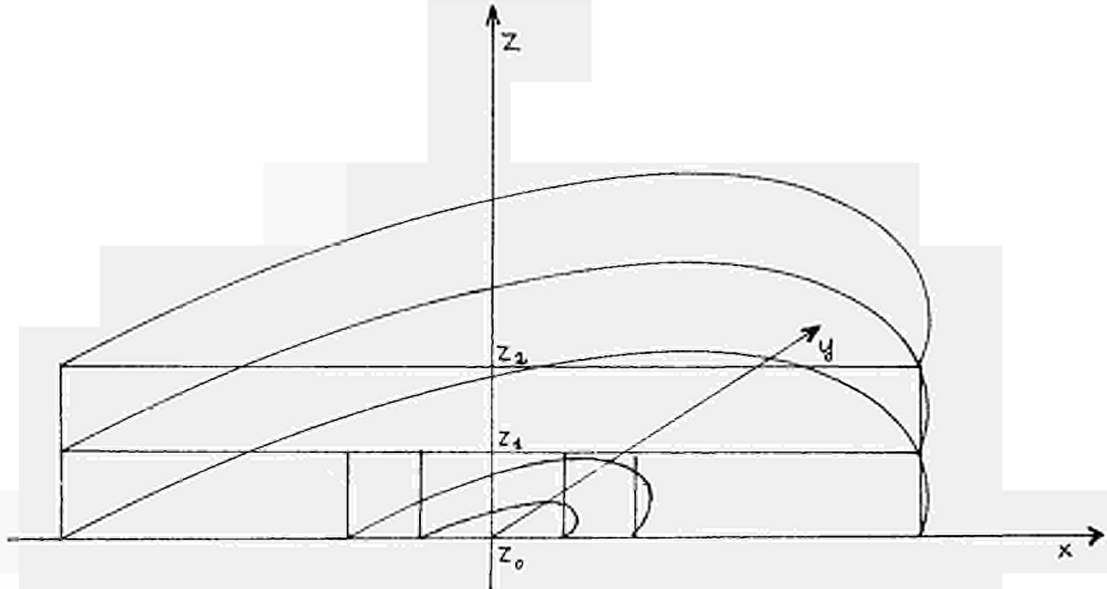
$$(11.1) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

Indicando con ξ_k la variabile indipendente misurata lungo le k-esime caratteristiche il sistema (10.10) può essere riscritto

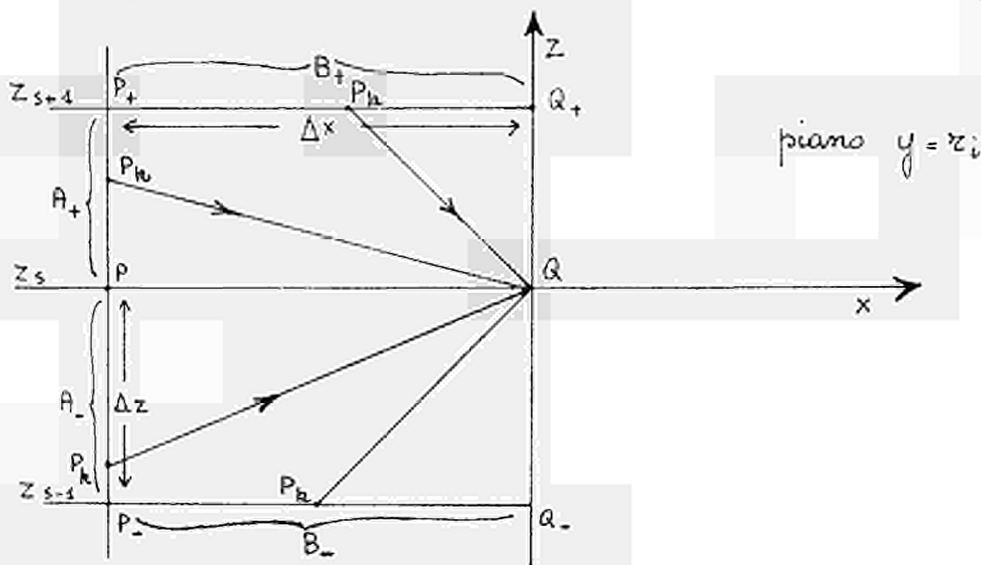
$$(11.2) \quad \frac{\partial \Phi_k(x, y, z)}{\partial \xi_k} + \sum_{t_k} \overline{(\sqrt{x^2+y^2}, z)} \Phi_k(x, y, z) = \\ = \sum_{s_k} \overline{(\sqrt{x^2+y^2}, z)} \bar{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2}, z) + S_k(\sqrt{x^2+y^2}, z) \\ (k = 1, 2, \dots, K)$$

Discretizziamo la variabile z : $0 = z_1 < z_2 < \dots < z_p = Z$.

In prospettiva il reticolo tridimensionale considerato appare come in figura :



Tagliamolo ora mediante il generico piano $y = z_i$.



Da quest'ultima figura si vede che se Q è il punto a cui converge una delle k -esime caratteristiche il punto P_k , da cui suddetta caratteristica esce, può appartenere a seconda del valore γ_k di γ ai lati A_+ , B_+ .

Integrando numericamente, come è stato fatto nelle altre geometrie, e considerando per semplicità il solo schema semplificato (che sarà poi quello utilizzato nella realizzazione dei

programmi numerici) si ha:

$$\begin{aligned}
 \Phi_k(Q) = & \Phi_k(P_k) \frac{1 - 1/2 \Sigma_{t_k}(\overline{P_k Q}) [\xi_k(Q) - \xi_k(P_k)]}{1 + 1/2 \Sigma_{t_k}(\overline{P_k Q}) [\xi_k(Q) - \xi_k(P_k)]} + \\
 (11.3) \quad & + \frac{1/2 [\xi_k(Q) - \xi_k(P_k)]}{1 + 1/2 \Sigma_{t_k}(\overline{P_k Q}) [\xi_k(Q) - \xi_k(P_k)]} \left\{ \Sigma_{s_k}(\overline{P_k Q}) [\bar{\Phi}_k(Q) + \bar{\Phi}_k(P_k)] + \right. \\
 & \left. + S_k(Q) + S_k(P_k) \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, K)
 \end{aligned}$$

dove con Σ_t e $\Sigma_s(\overline{P_j Q})$ si è indicato il valore delle sezioni d'urto nella regione a cui appartiene il segmento di caratteristica $\overline{P_k Q}$.

E' da tenere presente che per effettuare l'integrazione numerica si deve procedere, per ogni valore z_s della variabile z , da sinistra verso destra poichè sul quarto di circonferenza esterna, ottenuta mediante la trasformazione (3.1), compresa nella parte di piano $x < 0$, $y > 0$, è noto il valore del flusso tramite le condizioni al contorno (10.3).

Si deve procedere inoltre dall'estremo superiore del cilindro verso l'inferiore per tutti i valori γ_k della variabile γ tali che $\gamma_k < 0$ e dall'estremo inferiore del cilindro verso il superiore per tutti i $\gamma_k > 0$ sempre per il fatto che per $\gamma_k < 0$ è noto il flusso sul piano $z = Z$ e per $\gamma_k > 0$ è noto il flusso sul piano $z = 0$, entrambi dati dalle condizioni al contorno (10.3).

Nelle equazioni del sistema (11.3) compaiono delle funzioni dei punti P_k che in generale non coincidono con i punti nodali del reticolo.

Per calcolare i flussi soltanto nei punti nodali è necessario introdurre delle formule di interpolazione

che permettano di valutare i flussi nei punti P_k in funzione di quelli calcolati nei punti nodali adiacenti.

Per questo ci basiamo su quanto è stato fatto da H.B. Keller [6].

La tangente λ_k della caratteristica k-esima è data da

$$\lambda_k = \frac{\gamma_k}{\sqrt{1-\gamma_k^2}}$$

Se definiamo

$$(11.4) \quad \vartheta_k = \frac{\Delta z}{\Delta x} \frac{1}{\lambda_k}$$

si possono presentare quattro casi:

$$(11.5) \quad \begin{array}{ll} \vartheta_k \geq 1 & \text{se } P_k \in A_- \\ \left| \vartheta_k \right| \geq 1 & \vartheta_k \leq -1 \quad \text{se } P_k \in A_+ \\ 0 \leq \vartheta_k \leq 1 & \text{se } P_k \in B_- \\ \left| \vartheta_k \right| \leq 1 & -1 \leq \vartheta_k \leq 0 \quad \text{se } P_k \in B_+ \end{array}$$

La valutazione di una funzione f nel punto P_k avviene mediante le formule:

$$(11.6) \quad \begin{array}{ll} f(P_k) = \left| \vartheta_k \right| \Phi_k(P_{\pm}) + (1 - \left| \vartheta_k \right|) \Phi_k(Q_{\pm}) & \text{se } P_k \in B_{\pm} \\ f(P_k) = \left| \vartheta_k \right|^{-1} \Phi_k(P_{\pm}) + (1 - \left| \vartheta_k \right|^{-1}) \Phi_k(P) & \text{se } P_k \in A_{\pm} \end{array}$$

L'incremento della variabile ξ_k lungo la caratteristica k-esima è dato da

$$(11.7) \quad \xi_k(Q) - \xi_k(P_k) = \begin{cases} \Delta x / \sqrt{1-\gamma_k^2} & \text{se } P_k \in A_{\pm} \\ \Delta z / \left| \gamma_k \right| & \text{se } P_k \in B_{\pm} \end{cases}$$

12. Metodo misto

Vladimirov [2] suggerisce per risolvere il sistema (10.10) un secondo metodo che chiamiamo misto dato che utilizza il metodo delle differenze finite per quanto riguarda la variabile z .

Dopo aver discretizzato la variabile $z : 0 = z_1 < z_2 \dots < z_p = Z$ prendiamo in esame il generico intervallo $z_m \leq z \leq z_{m+1}$.

Sia $z_{m+1/2}$ il punto medio di tale intervallo; poniamo $\Phi_{k,m+1/2}(x,y) \equiv \Phi_k(x,y,z_{m+1/2})$ e approssimiamo la derivata che compare nelle equazioni (10.10) con il relativo rapporto incrementale. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \Phi_{k,m+1/2}(x,y)}{\partial x} + \frac{\gamma_k}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \frac{\Phi_{k,m+1}(x,y) - \Phi_{k,m}(x,y)}{z_{m+1} - z_m} + \\
 (12.1) \quad & + \Sigma_{t_{k,m+1/2}} (\sqrt{x^2+y^2}) \Phi_{k,m+1/2}(x,y) = \\
 & = \Sigma_{s_{k,m+1/2}} (\sqrt{x^2+y^2}) \bar{\Phi}_{m+1/2} (\sqrt{x^2+y^2}) + S_{k,m+1/2} (\sqrt{x^2+y^2}) \\
 & \qquad \qquad \qquad \left(\begin{array}{l} k=1,2,\dots,K \\ m=1,2,\dots,p-1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Facendo l'ipotesi che il flusso sia lineare in ogni intervallo $z_m \leq z \leq z_{m+1}$, e precisamente

$$(12.2) \quad 2\Phi_{k,m+1/2}(x,y) = \Phi_{k,m}(x,y) + \Phi_{k,m+1}(x,y)$$

il sistema (12.1) assume la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Phi_{k,m+1/2}(x,y)}{\partial x} + \left[\Sigma_{t_{k,m+1/2}}(\sqrt{x^2+y^2}) + \right. \\
& \left. + \frac{2|\gamma_k|}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \frac{1}{z_{m+1}-z_m} \right] \Phi_{k,m+1/2}(x,y) = \\
& = \Sigma_{s_{k,m+1/2}}(\sqrt{x^2+y^2}) \bar{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2}) + S_{k,m+1/2}(\sqrt{x^2+y^2}) + \\
& + \frac{2|\gamma_k|}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \frac{1}{z_{m+1}-z_m} \Phi_{k,l}(x,y) \\
& \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left(\begin{array}{l} k=1,2,\dots,K \\ m=1,2,\dots,p-1 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
(12.4) \quad & l = m \qquad \text{se } \gamma_k > 0 \\
& l = m+1 \qquad \text{se } \gamma_k < 0
\end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{aligned}
(12.5) \quad & S'_{k,m+1/2}(x,y) = S_{k,m+1/2}(\sqrt{x^2+y^2}) + \\
& + \frac{2|\gamma_k|}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \frac{1}{z_{m+1}-z_m} \Phi_{k,l}(x,y) \\
& \Sigma'_{t_{k,m+1/2}}(\sqrt{x^2+y^2}) = \Sigma_{t_{k,m+1/2}}(\sqrt{x^2+y^2}) + \\
& + \frac{2|\gamma_k|}{\sqrt{1-\gamma_k^2}} \frac{1}{z_{m+1}-z_m}
\end{aligned}$$

si ha infine

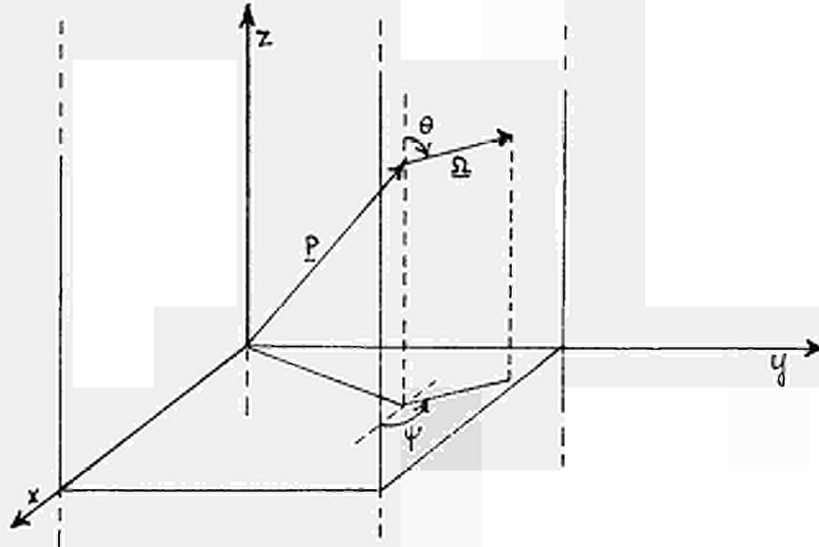
$$\begin{aligned}
 (12.6) \quad & \frac{\partial \Phi_{k,m+1/2}(x,y)}{\partial x} + \sum_{t_{k,m+1/2}}' (\sqrt{x^2+y^2}) \Phi_{k,m+1/2} = \\
 & = \sum_{s_{k,m+1/2}} (\sqrt{x^2+y^2}) \bar{\Phi}_{m+1/2} (\sqrt{x^2+y^2}) + S_{k,m+1/2}'(x,y) \\
 & \qquad \qquad \qquad \left(\begin{array}{l} k=1,2,\dots,K \\ m=1,2,\dots,p-1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Cioè per ogni k ed ogni m abbiamo ottenuto una equazione formalmente simile alla (3.3) valida in geometria sferica e può quindi essere risolta in modo completamente analogo.

E' da rilevare che nel metodo misto la condizione di continuità alle interfacce (10.4) non implica la continuità del flusso nella direzione di integrazione, non si può cioè affermare che $\Phi_{k,m+1/2}(x,y)$ sia continuo rispetto alla variabile x anche se nel procedimento di integrazione è necessario supporre che tale condizione sia verificata.

13. Geometria di sezione rettangolare e altezza infinita

Applichiamo infine il metodo delle caratteristiche alla geometria di sezione rettangolare $0 \leq x \leq X$, $0 \leq y \leq Y$ e altezza infinita [7]



In questo caso l'equazione del trasporto dei neutroni diventa:

$$(13.1) \quad \sin \vartheta \left[\cos \psi \frac{\partial \Phi(x, y, \vartheta, \psi)}{\partial x} + \sin \psi \frac{\partial \Phi(x, y, \vartheta, \psi)}{\partial y} \right] + \Sigma_t(x, y) \Phi(x, y, \vartheta, \psi) = \Sigma_s(x, y) \bar{\Phi}(x, y) + S(x, y)$$

dove

$$(13.2) \quad \bar{\Phi}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin \vartheta' \Phi(x, y, \vartheta', \psi') = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^{\pi/2} d\vartheta' \sin \vartheta' \Phi(x, y, \vartheta', \psi')$$

dato che la geometria considerata gode della proprietà di simmetria:

$$(13.3) \quad \Phi(x, y, \vartheta, \psi) = \Phi(x, y, \pi - \vartheta, \psi) \quad ,$$

e dove il dominio di definizione delle variabili è dato da

$$(13.4) \quad \begin{aligned} 0 &\leq x \leq X \\ 0 &\leq y \leq Y \\ 0 &\leq \psi \leq 2\pi \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi/2 \end{aligned}$$

Le condizioni al contorno sono

$$(13.5) \quad \begin{aligned} \Phi(X, y, \vartheta, \psi) &= 0 && \text{per } \frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{3}{2} \pi \\ \Phi(x, Y, \vartheta, \psi) &= 0 && \text{per } \pi \leq \psi \leq 2\pi \\ \Phi(0, y, \vartheta, \psi) &= 0 && \text{per } 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \text{ e } \frac{3}{2} \pi \leq \psi \leq 2\pi \\ \Phi(x, 0, \vartheta, \psi) &= 0 && \text{per } 0 \leq \psi \leq \pi \end{aligned}$$

e la condizione di continuità alle interfacce

$$(13.6) \quad \Phi(x+s \sin \vartheta \cos \psi, y+s \sin \vartheta \sin \psi, \vartheta, \psi)$$

continuo rispetto ad s

Poniamo $\gamma = \cos \vartheta$; discretizziamo la nuova variabile γ ,
 $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_K < 1$ e la variabile angolare ψ ,
 $0 < \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_q < 2\pi$ ($\psi_1 \neq$ multipli di $\frac{\pi}{2}$). In corri-
spondenza di ogni valore γ_k di ψ e ψ_l di ψ si ottiene, divi-
dendo per $\sqrt{1-\gamma_k^2}$,

$$(13.7) \quad \begin{aligned} \cos \psi_l \frac{\partial \Phi_{k,l}(x,y)}{\partial x} + \sin \psi_l \frac{\partial \Phi_{k,l}(x,y)}{\partial y} + \Sigma_{t_k}(x,y) \Phi_{k,l}(x,y) = \\ = \Sigma_{S_k} \bar{\Phi}(x,y) + S_k(x,y) \end{aligned} \quad \begin{aligned} (k = 1, 2, \dots, K) \\ (l = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

Le linee caratteristiche dell'operatore differenziale che compare nelle equazioni del sistema (13.7) sono individuate da

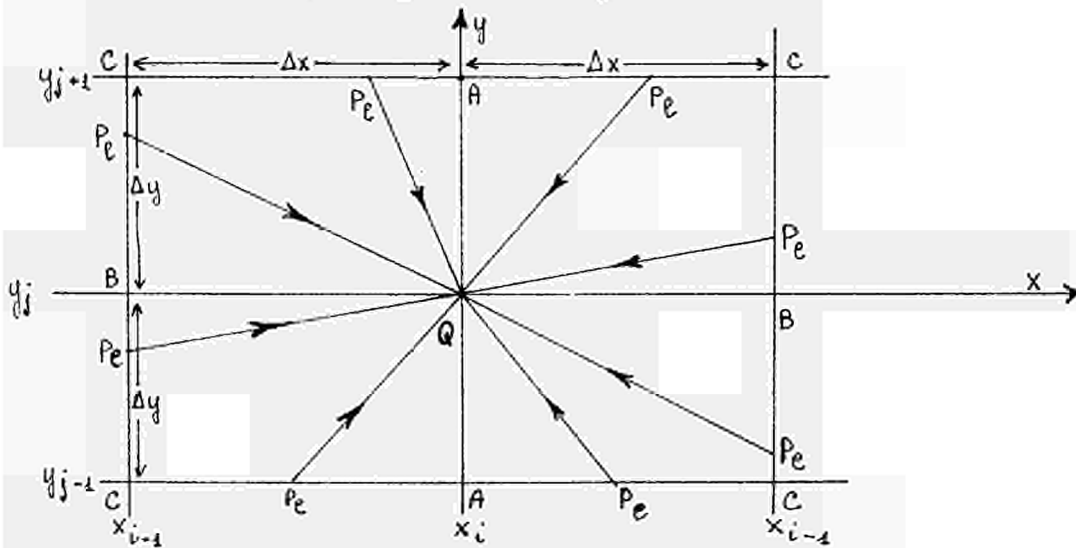
$$(13.8) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \psi_1$$

Se chiamiamo ξ_1 la variabile indipendente misurata lungo suddette caratteristiche il sistema (13.7) può essere scritto:

$$(13.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{k,1}(x,y)}{\partial \xi_1} + \sum_{t_{k,1}}(x,y) \Phi_{k,1}(x,y) = \\ = \sum_{s,k}(x,y) \bar{\Phi}(x,y) + S_k(x,y) \end{aligned} \quad \begin{aligned} (k = 1, 2, \dots, K) \\ (l = 1, 2, \dots, q) \end{aligned}$$

La condizione (13.6) assicura la continuità del flusso $\Phi_{k,1}(x,y)$ rispetto a ξ_1 .

A questo punto discretizziamo le variabili x e y : $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_n = X$, $0 = y_1 < y_2 < \dots < y_p = Y$.



Sia Q un punto del reticolo nel piano x - y a cui converge la caratteristica l -esima. Come si vede in figura il valore di ψ_1 determina la pendenza della caratteristica che può giacere nel primo, nel secondo, nel terzo oppure nel quarto quadrante. Comunque se si integrano numericamente le equazioni del sistema (13.9) tra il punto P_1 , da cui esce la caratteristica, e il punto Q si ottiene, nello schema semplificato, il sistema

$$\begin{aligned}
 (13.10) \quad \Phi_{k,l}(Q) &= \Phi_{k,l}(P_1) \frac{1 - \frac{1}{2} \sum_{t_k} (\overline{P_1 Q}) [\xi(Q) - \xi(P_1)]}{1 + \frac{1}{2} \sum_{t_k} (\overline{P_1 Q}) [\xi(Q) - \xi(P_1)]} + \\
 &+ \left\{ \sum_{s_k} (\overline{P_1 Q}) [\overline{\Phi}(Q) + \overline{\Phi}(P_1)] + s_k(Q) + s_k(P_1) \right\} \frac{1/2 [\xi(Q) - \xi(P_1)]}{1 + \frac{1}{2} \sum_{t_k} [\xi(Q) - \xi(P_1)]} \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, K \\ l = 1, 2, \dots, q \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
 (13.11) \quad \xi(Q) - \xi(P_1) &= \frac{\Delta x}{|\cos \psi_1|} \quad \text{per } P_1 \text{ appartenente ai lati} \\
 &\quad \text{paralleli all'asse } y \\
 &= \frac{\Delta y}{|\sin \psi_1|} \quad \text{per } P_1 \text{ appartenente ai lati} \\
 &\quad \text{paralleli all'asse } x
 \end{aligned}$$

Per la valutazione di una funzione f nel punto P_1 , in generale non coincidente con un punto nodale del reticolo, si usa la formula di interpolazione

$$(13.12) \quad f(P_1) = (1-t)f(Z) + tf(C)$$

dove

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \left| \operatorname{tg} \psi_1 \right| \quad \text{per } P_1 \text{ appartenente ai lati} \\
 &\quad \text{paralleli all'asse } y \\
 Z &= B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (13.13) \quad t &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \left| \operatorname{cotg} \psi_1 \right| \quad \text{per } P_1 \text{ appartenente ai lati} \\
 &\quad \text{paralleli all'asse } x \\
 Z &= A
 \end{aligned}$$

14. Esperienze numeriche

Sono stati realizzati dei programmi numerici che risolvono il problema 1 e il problema 2 nelle varie geometrie trattate precedentemente utilizzando le formule dello schema semplificato. I programmi sono scritti in FORTRAN IV per il calcolatore IBM 7090.

E' stata condotta una serie di esperienze numeriche sistematiche per confrontare il metodo S_n di Carlson [8] con il metodo delle caratteristiche qui sviluppato.

Sono riportati i risultati ottenuti con questi due metodi. Per quanto riguarda il problema 1 è dato il valore dell'autovalore massimo in modulo, il "test di convergenza" del quale è

$$\left| \frac{\lambda^{(e+1)} - \lambda^{(e)}}{\lambda^{(e)}} \right| \leq \varepsilon$$

ed è tracciato il grafico dell'autovettore corrispondente.

Per quanto riguarda il problema 2 è tracciato il grafico della soluzione della equazione (1.1) in corrispondenza di un termine di sorgente prefissato.

Per accelerare la convergenza del metodo iterativo impiegato è stata utilizzata la tecnica di over-relaxation puntuale; precisamente dato lo schema iterativo

$$A\Phi^{n+1} = B\Phi^n + S$$

esso viene modificato in

$$A\Phi^{n+1} = (1-\omega)A\Phi^n + \omega(B\Phi^n + S) \quad 1 \leq \omega < 2$$

Relativamente alla geometria sferica è riportato un grafico che mostra come varia il numero di iterazioni necessarie per raggiungere la convergenza al variare del fattore ω di over-relaxation.

Nelle geometrie cilindriche sono stati usati due metodi per integrare il flusso lungo la variabile angolare γ (coseno dell'angolo formato da $\underline{\Omega}$ con l'asse z):

- a) L'intervallo di integrazione è stato suddiviso in K sub-intervalli uguali Δ e come punti nodali sono stati presi i loro punti medi con pesi $\frac{1}{K}$.
- b) I punti nodali sono costituiti dagli zeri dei polinomi di Legendre secondo la formula di quadratura di Gauss che ne determina i pesi [8].

Le esperienze numeriche effettuate mostrano però che non vi sono notevoli differenze fra i risultati ottenuti con questi due metodi.

Ringraziamenti

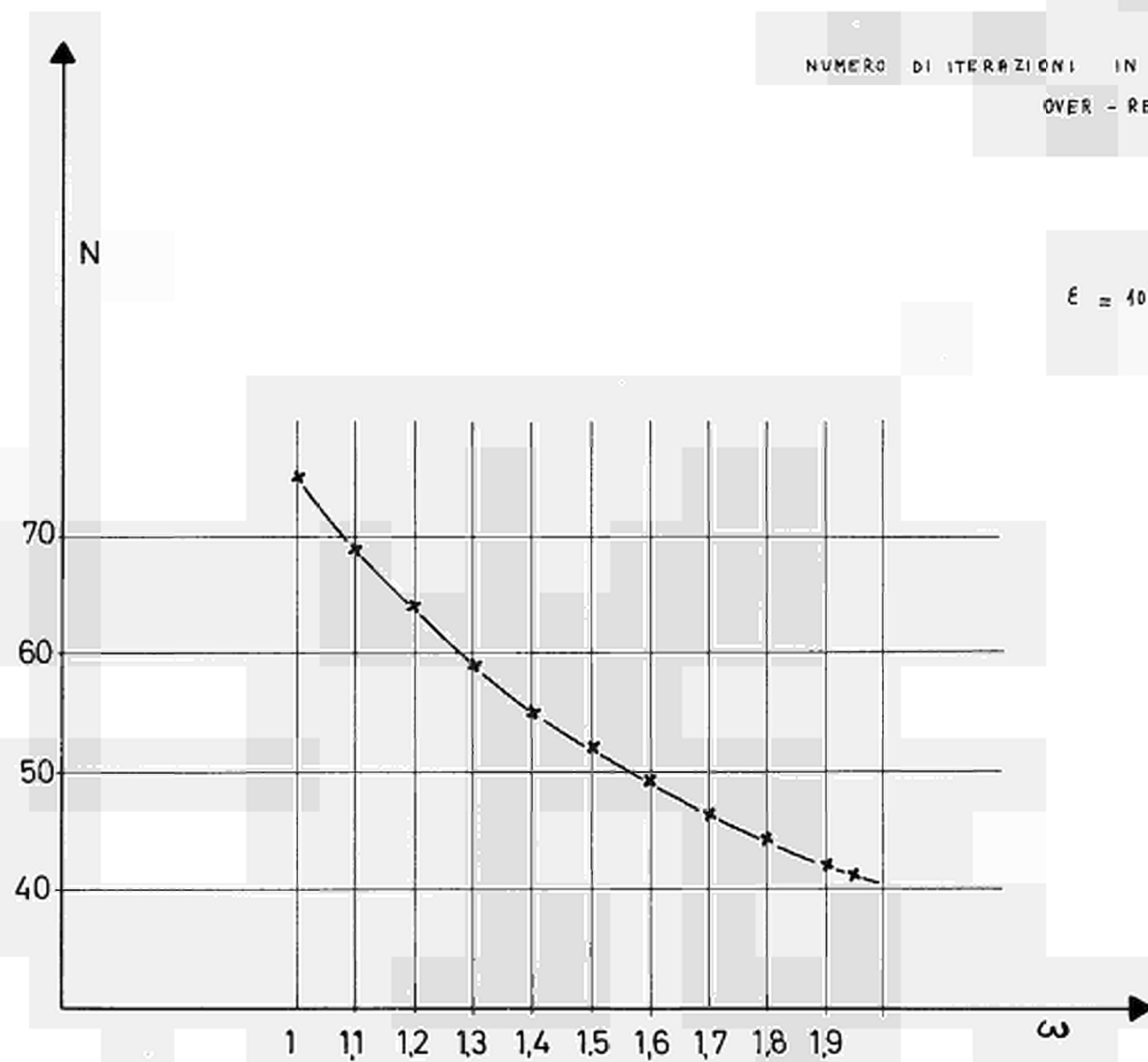
Questo rapporto è il risultato di un lavoro eseguito per mezzo di una borsa di studio dell'Euratom.

In primo luogo desidero ringraziare la Signorina G. POZZI, capo servizio del C.E.T.I.S. (Centro di Trattamento dell'Informazione Scientifica) per l'interessamento dimostrato durante lo svolgimento di questo lavoro. In secondo luogo desidero ringraziare il Signor I. Galligani per avermi suggerito l'argomento di questo lavoro e per il suo continuo aiuto. Infine un vivo ringraziamento va alla Signorina I. Beltramini per aver battuto a macchina questo rapporto.

SPERA [SORGENTE]

NUMERO DI ITERAZIONI IN FUNZIONE DEL FATTORE DI
OVER - RELAXATION

$$\epsilon = 10^{-5}$$



Geometria sferica

I° CASO Problema 1 N° REGIONI : 2

Regione	Σ_t	Σ_s	$v\Sigma_f$
1	.294646	.256320	.0632589
2	.339836	.313654	.0

II° CASO Problema 1 N° REGIONI : 4

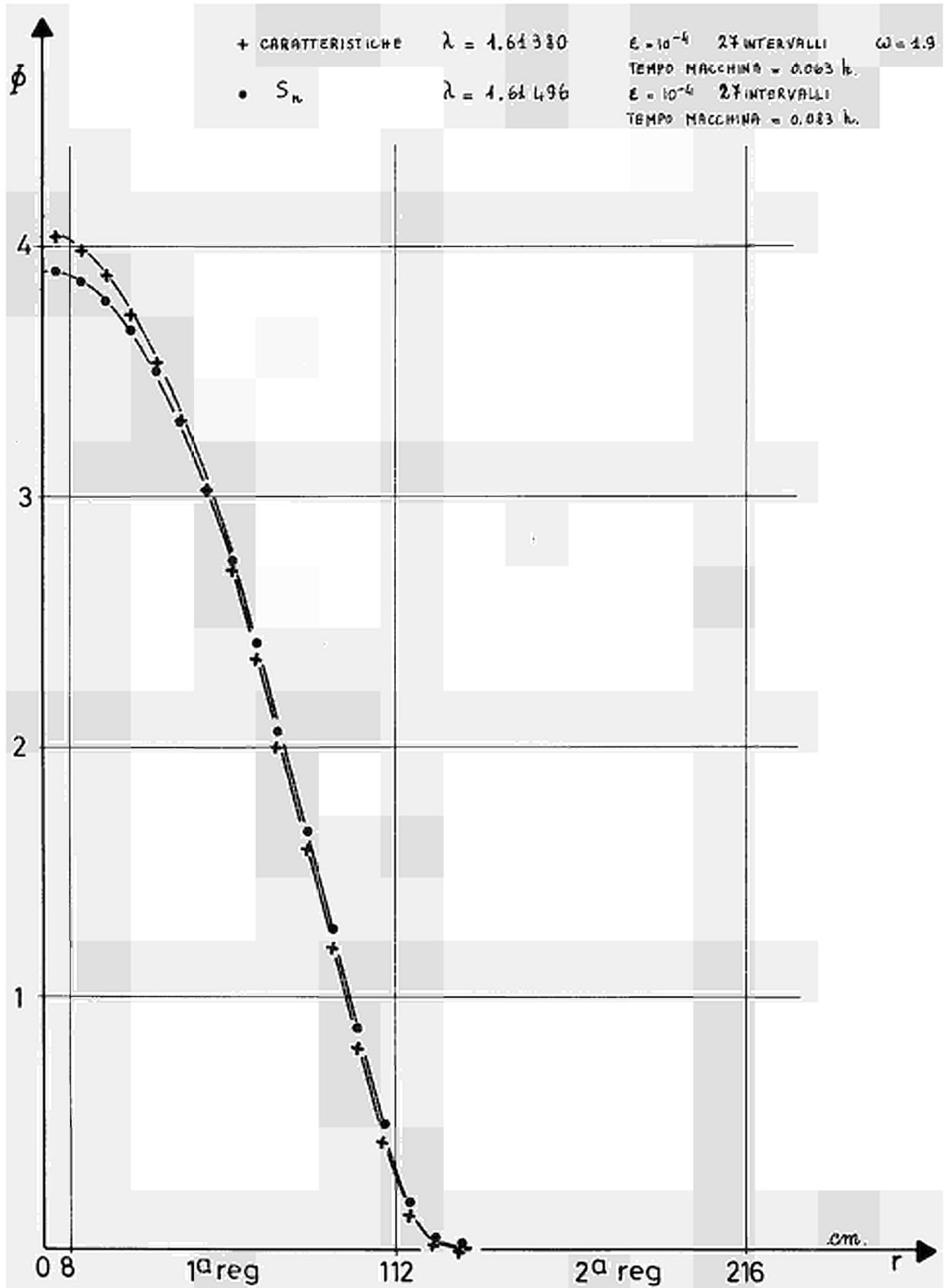
Regione	Σ_t	Σ_s	$v\Sigma_f$
1	.294646	.256320	.06325589
2	.339836	.313654	.0
3	.294646	.256320	.06325589
4	.339836	.313654	.0

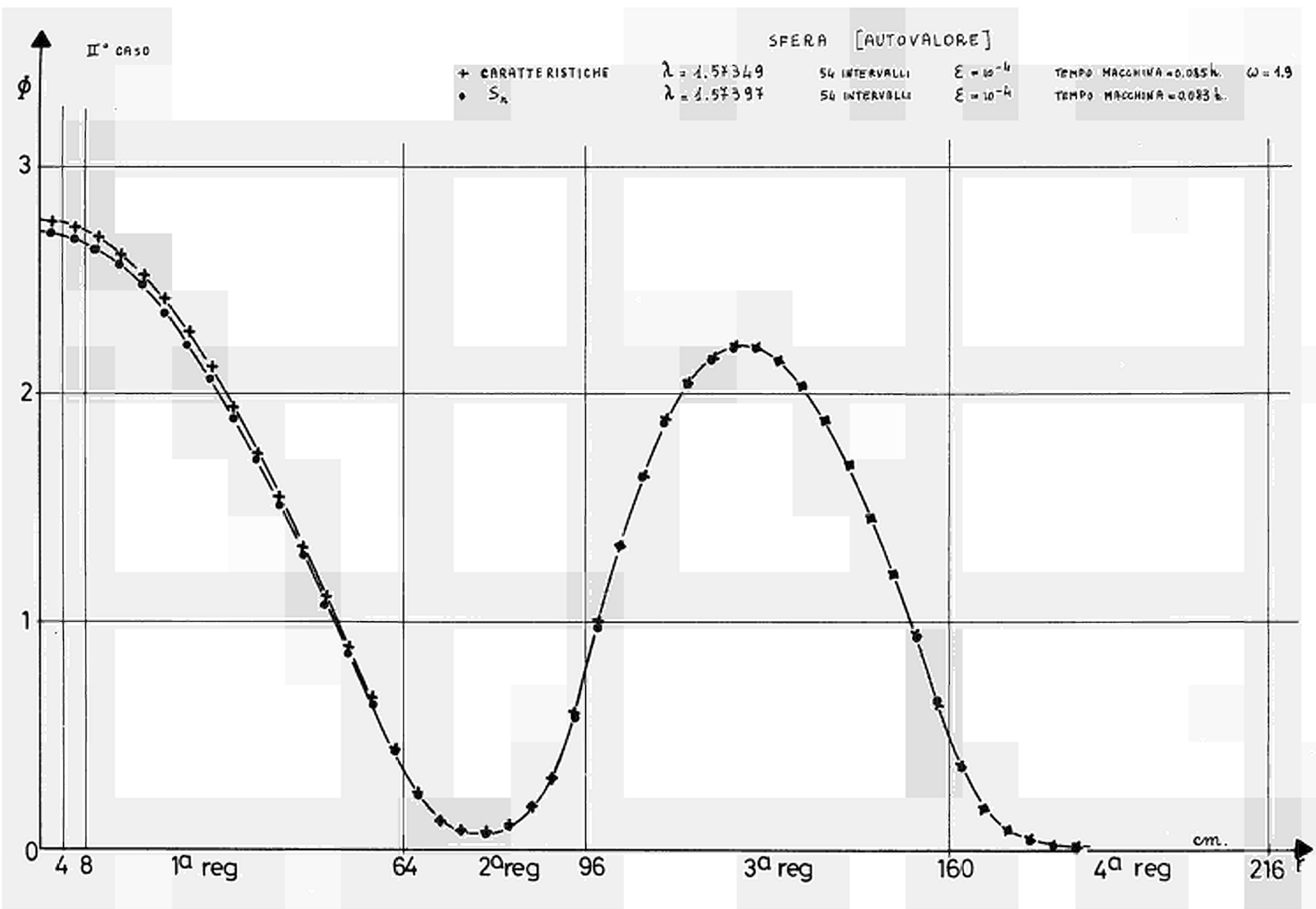
III° CASO Problema 2 N° REGIONI : 4

Regione	Σ_t	Σ_s	Sorgente
1	.294646	.256320	1.
2	.339836	.313654	0.
3	.294646	.256320	1.
4	.339836	.313654	0.

I° CASO

SFERA [AUTOVALORE]





II° caso

SPERA [AUTOVALORE]

+ CARATTERISTICHE

27 INTERVALLI

$\epsilon = 10^{-4}$

$\lambda = 1.57078$

TEMPO MACCHINA = 0.039 h.

$\omega = 1.9$

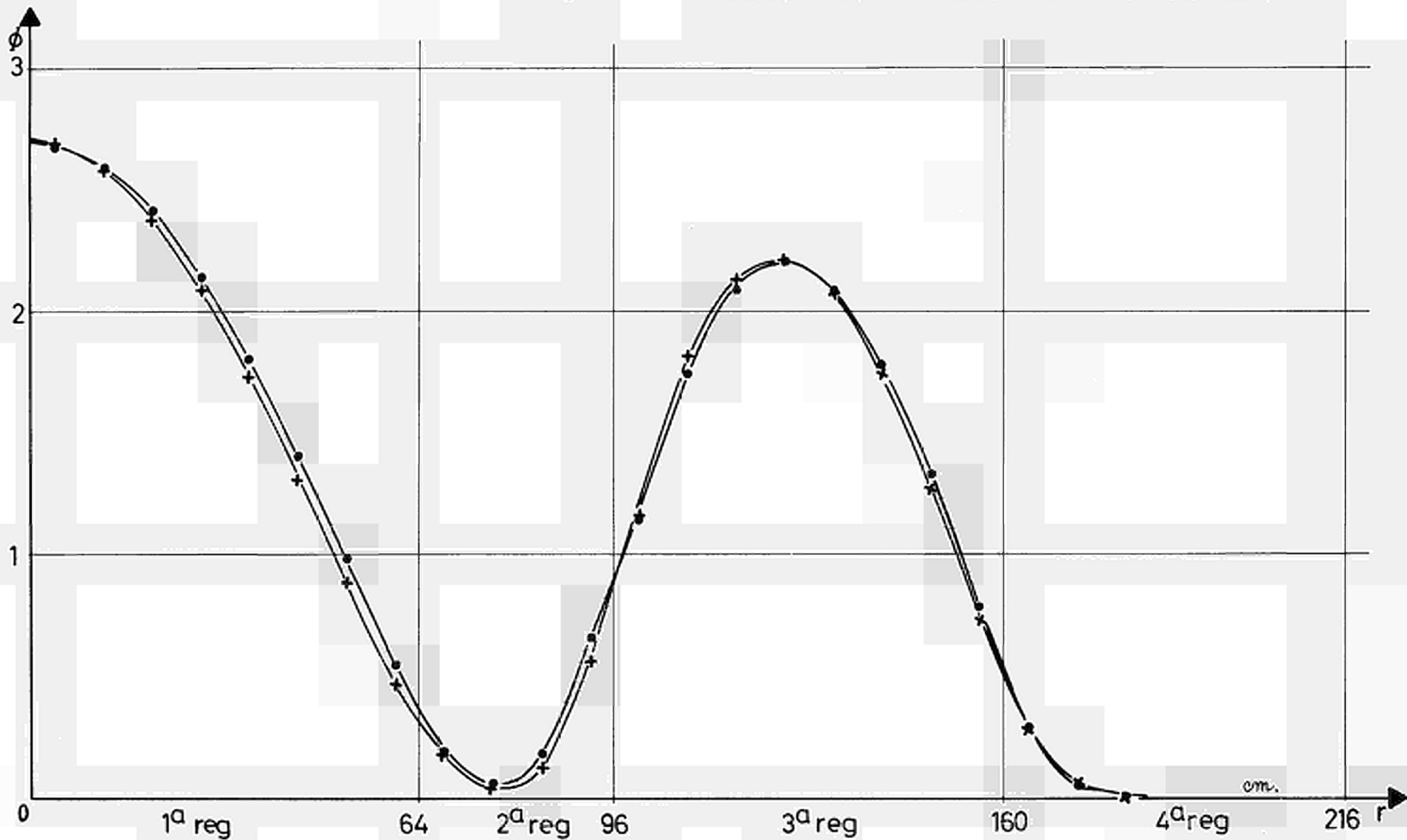
• S_n

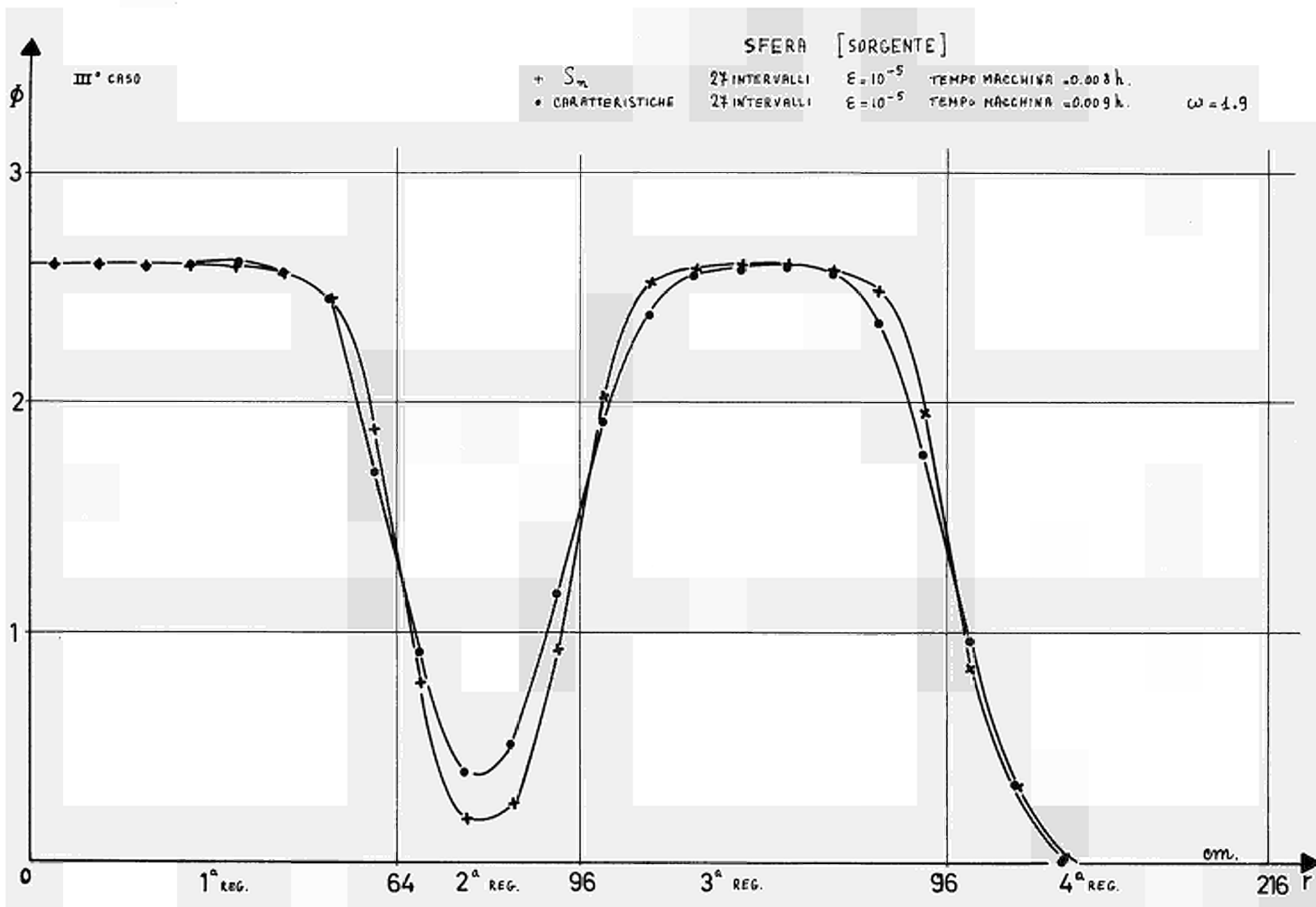
27 INTERVALLI

$\epsilon = 10^{-4}$

$\lambda = 1.57324$

TEMPO MACCHINA = 0.042 h.





Geometria cilindrica infinitaI^o CASO Problema 1 N^o REGIONI : 2

Regione	Σ_t	Σ_s	$v\Sigma_f$
1	.294646	.256320	.0632689
2	.339836	.313654	.0

II^o CASO Problema 1 N^o REGIONI : 4

Regione	Σ_t	Σ_s	$v\Sigma_f$
1	.294646	.256320	.0632589
2	.339836	.313654	.0
3	.294646	.256320	.0632589
4	.339836	.313654	.0

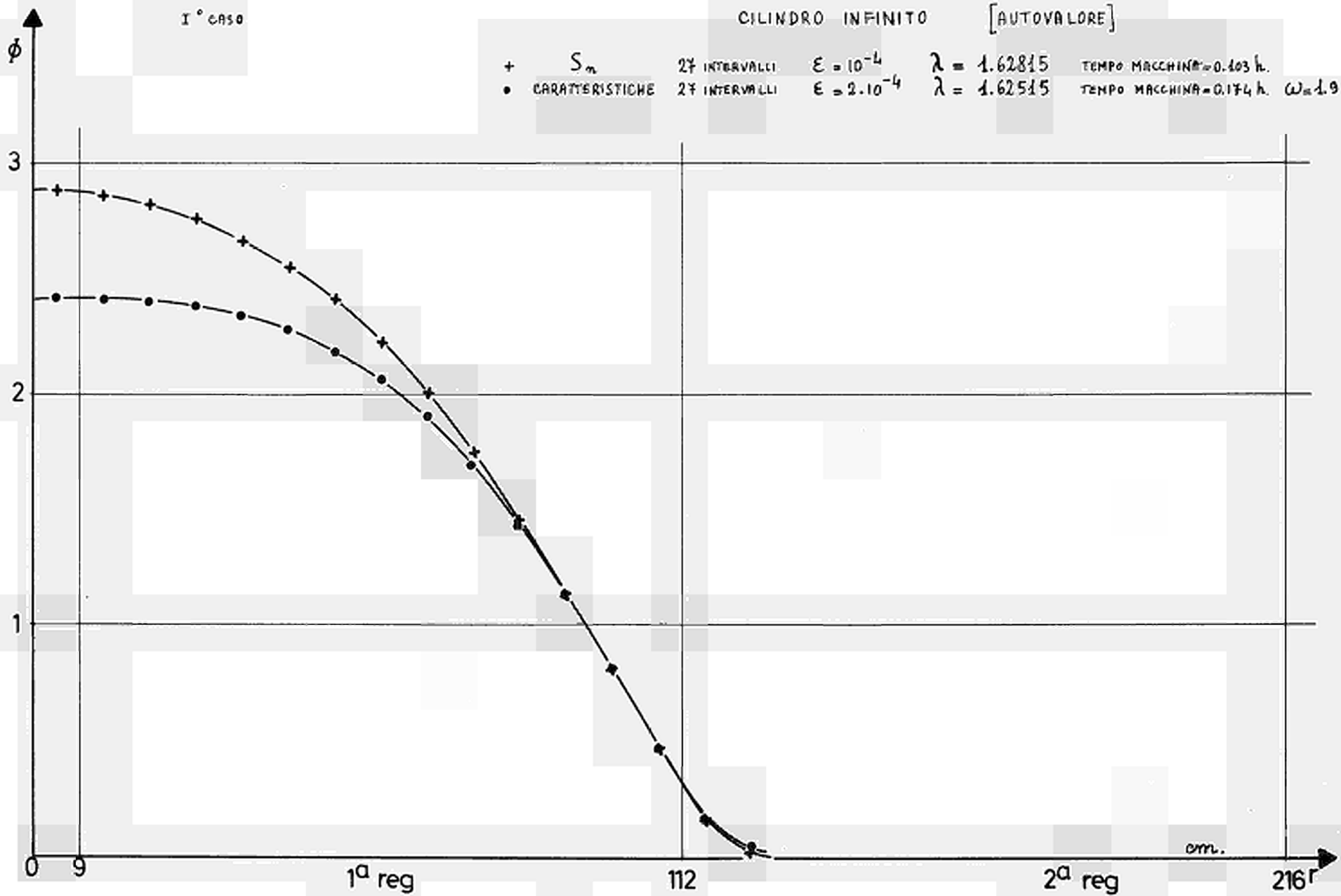
III^o CASO Problema 2 N^o REGIONI : 4

Regione	Σ_t	Σ_s	Sorgente
1	.294646	.256320	1.
2	.339836	.313654	0.
3	.294646	.256320	1.
4	.339836	.313654	0.

I° caso

CILINDRO INFINITO [AUTOVALORE]

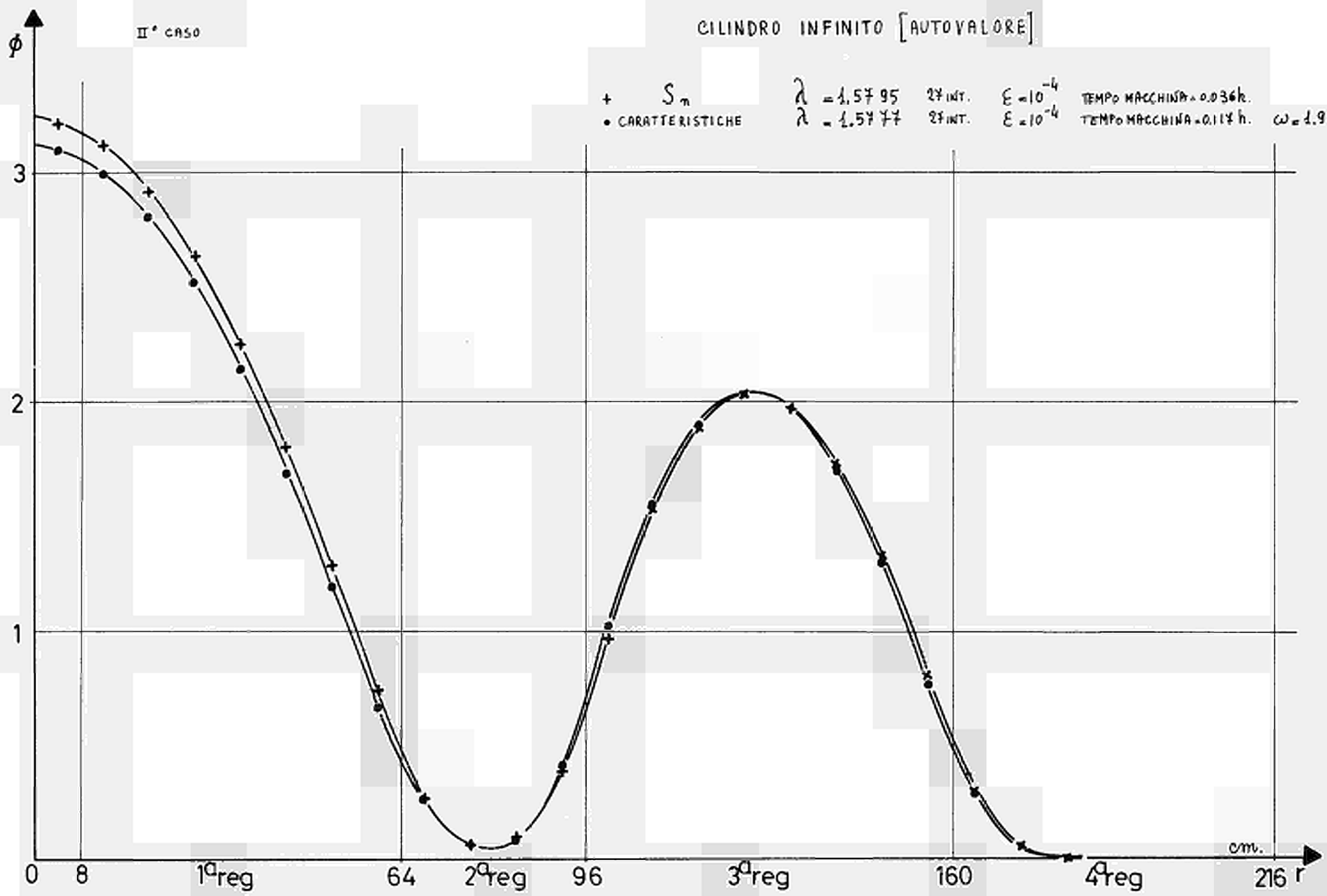
+ S_n 27 INTERVALLI $\epsilon = 10^{-4}$ $\lambda = 1.62815$ TEMPO MACCHINA = 0.103 h.
• CARATTERISTICHE 27 INTERVALLI $\epsilon = 2 \cdot 10^{-4}$ $\lambda = 1.62515$ TEMPO MACCHINA = 0.174 h. $\omega = 1.9$



II° caso

CILINDRO INFINITO [AUTOVALORE]

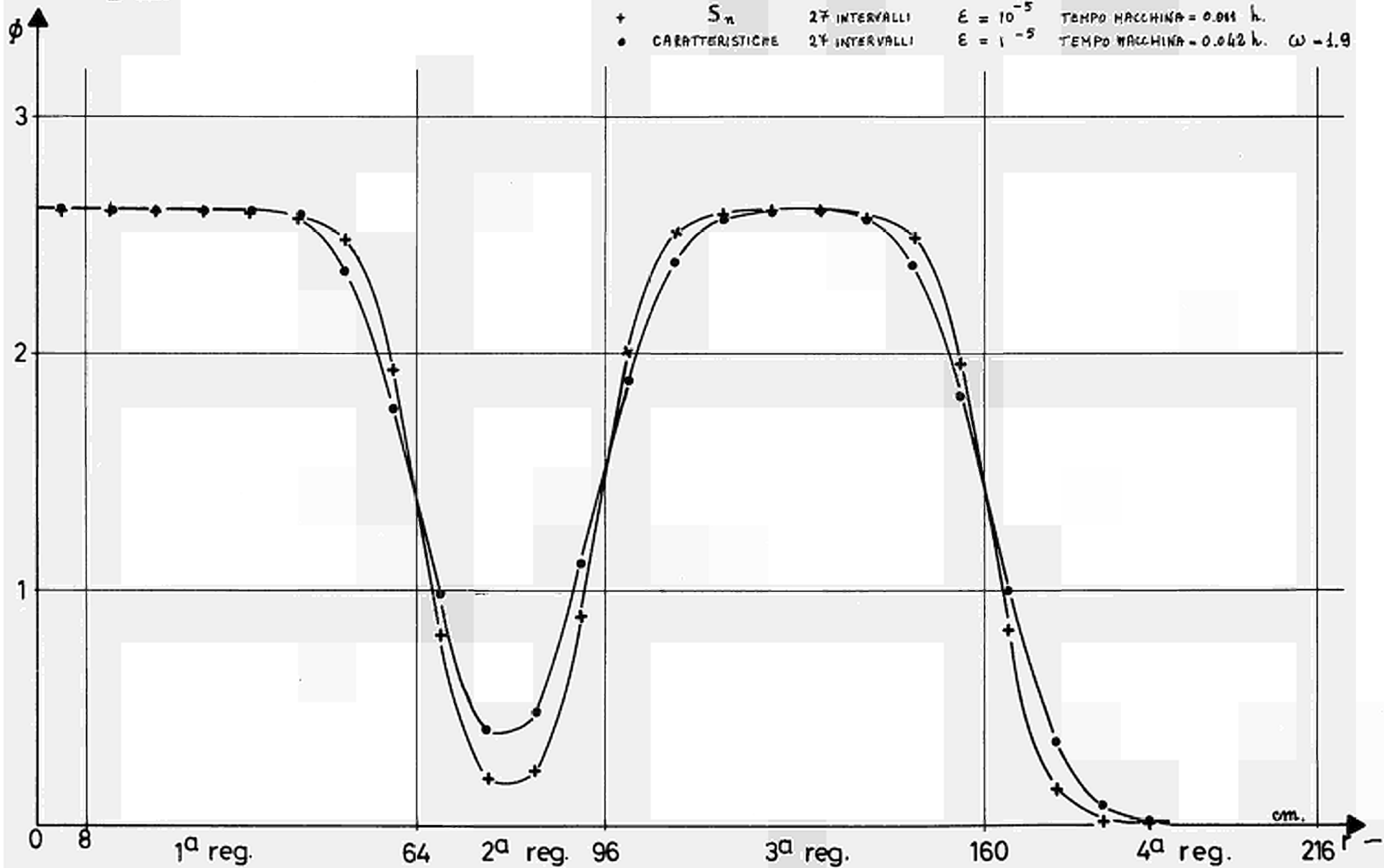
+ S_n $\lambda = 1.5795$ 2° INT. $\epsilon = 10^{-4}$ TEMPO MACCHINA = 0.036 h.
• CARATTERISTICHE $\lambda = 1.5777$ 2° INT. $\epsilon = 10^{-4}$ TEMPO MACCHINA = 0.117 h. $\omega = 1.9$



III° CASO

CILINDRO INFINITO [SORGENTE]

+ S_n 27 INTERVALLI $\epsilon = 10^{-5}$ TEMPO MACCHINA = 0.011 h.
• CARATTERISTICHE 27 INTERVALLI $\epsilon = 1^{-5}$ TEMPO MACCHINA = 0.042 h. $\omega = 1.9$

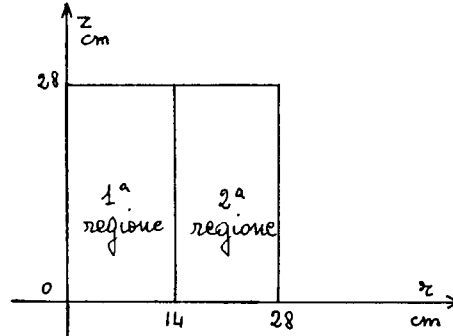


Geometria cilindrica finita

I° CASO

Problema 1

N° REGIONI : 2

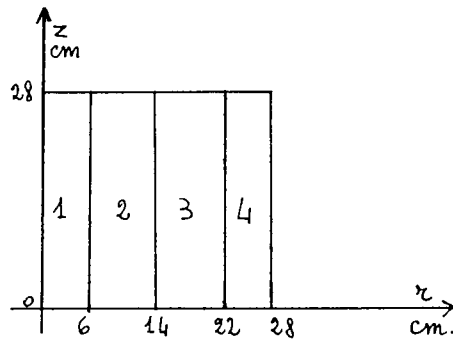


Regione	Σ_t	Σ_S	$\nu \Sigma_f$
1	.294646	.256320	.0632589
2	.339836	.313654	.0

II° CASO

Problema 1

N° REGIONI : 4

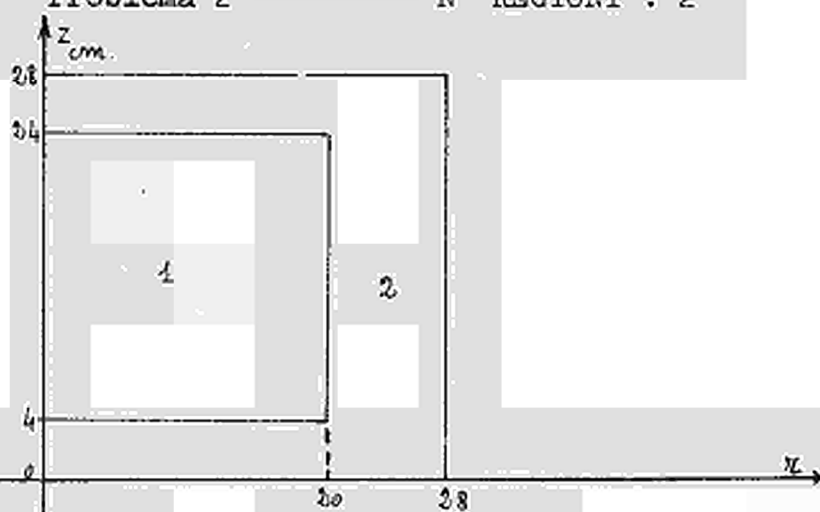


Regione	Σ_t	Σ_S	$\nu \Sigma_f$
1	.294646	.256320	.
2	.339836	.313654	.0
3	.294646	.256320	.0632589
4	.339836	.313654	.0

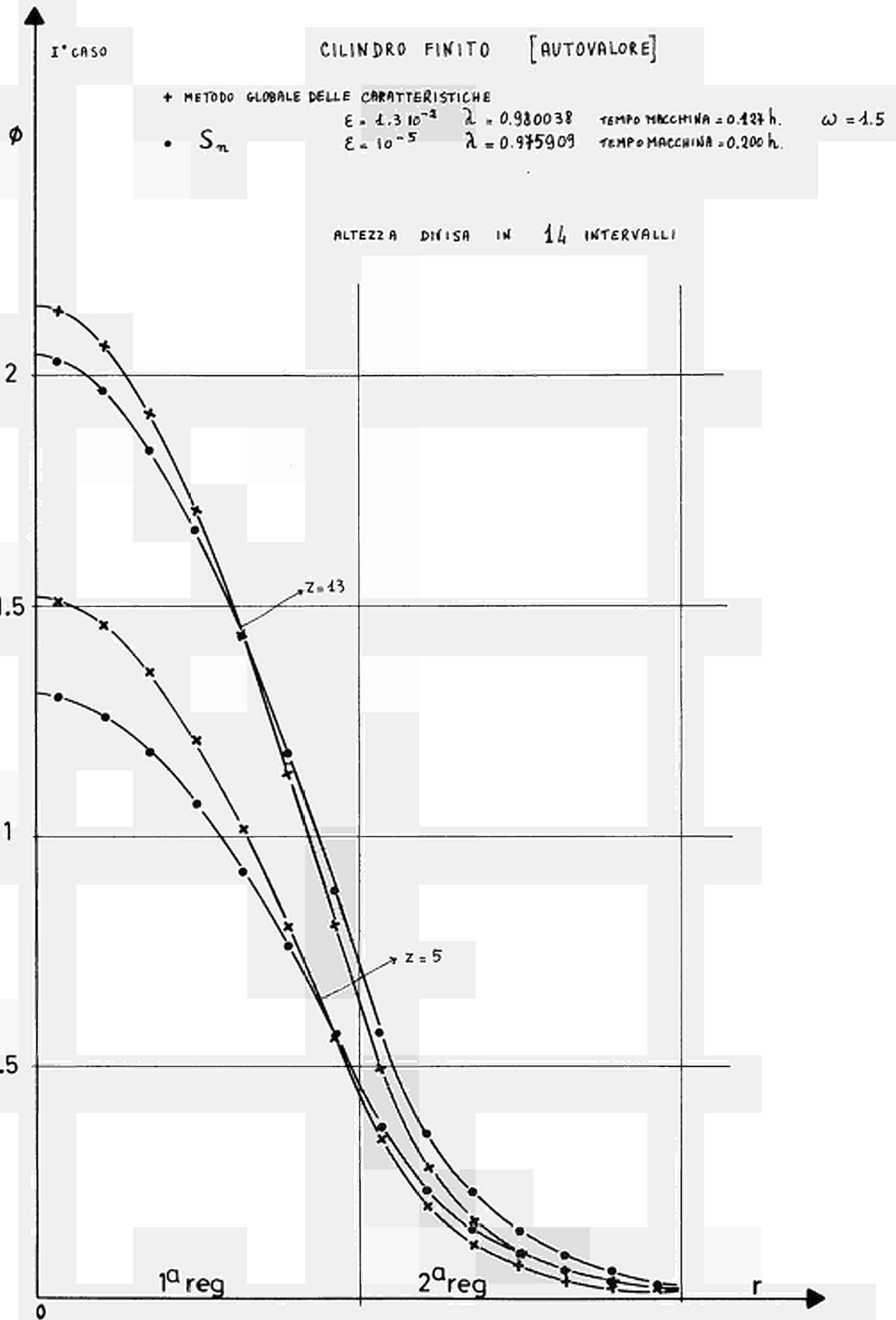
III° CASO

Problema 2

N° REGIONI : 2



Regione	Σ_t	Σ_a	Sorgente
1	.663896	.191751	1.
2	.386907	.191751	0.



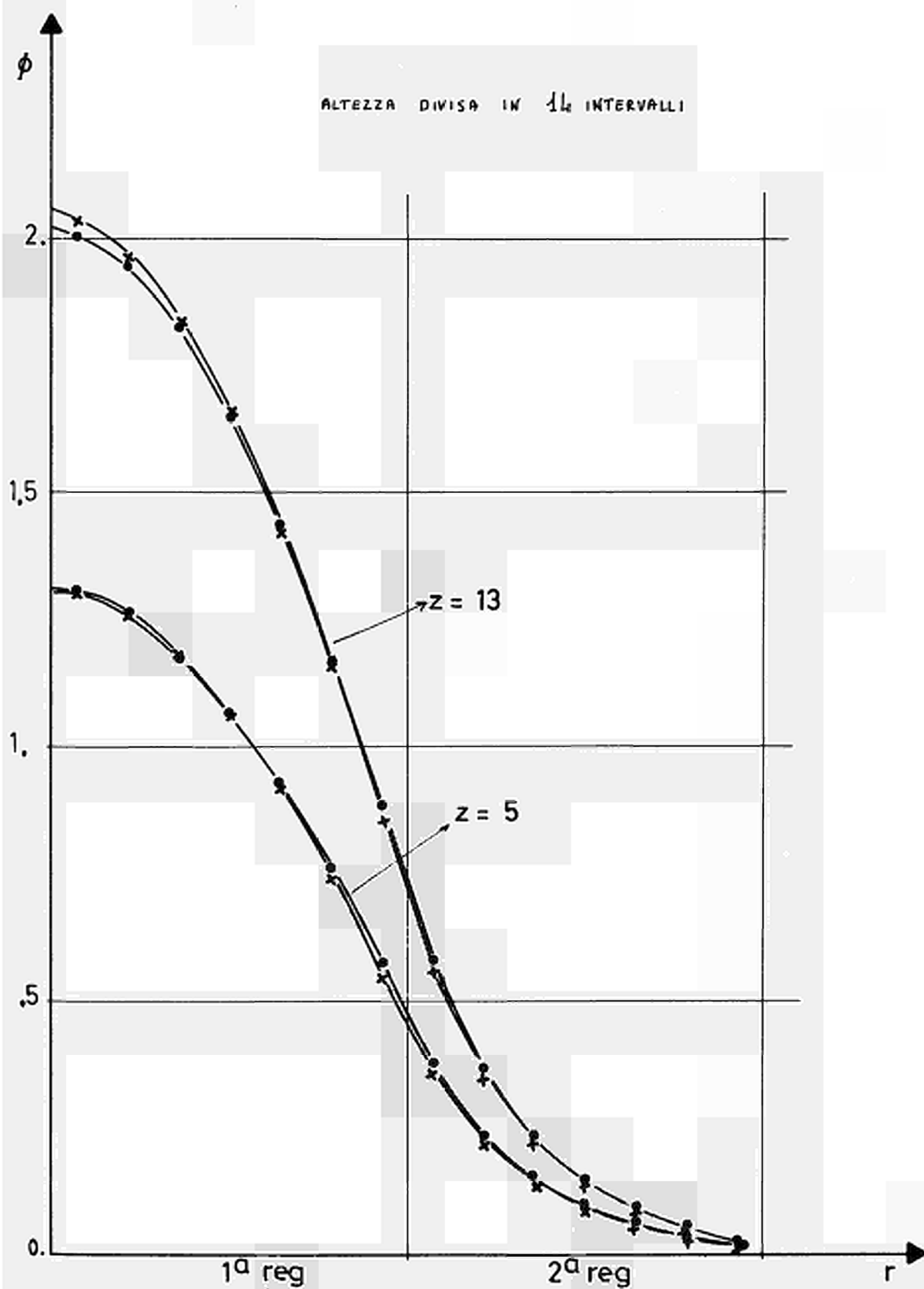
I° CASO

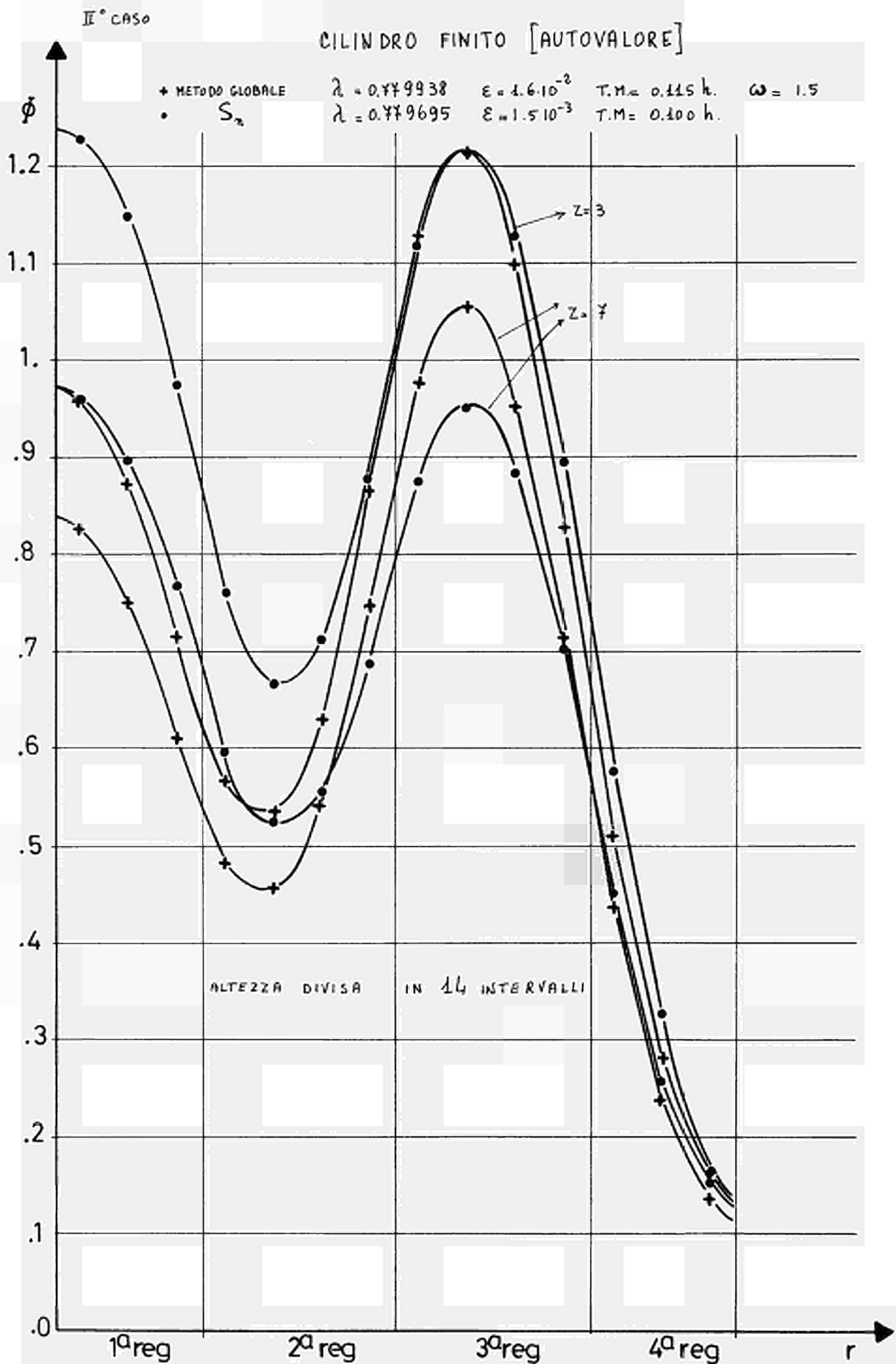
CILINDRO FINITO [AUTOVALORE]

x METODO MISTO
 • S_n

$\lambda = .967956$
 $\lambda = .970444$

$E = .5 \cdot 10^{-3}$ T.M. = 0.200 h. $\omega = 1.5$
 $E = 10^{-3}$ T.M. = 0.100 h.





CILINDRO FINITO [SORGENTE]

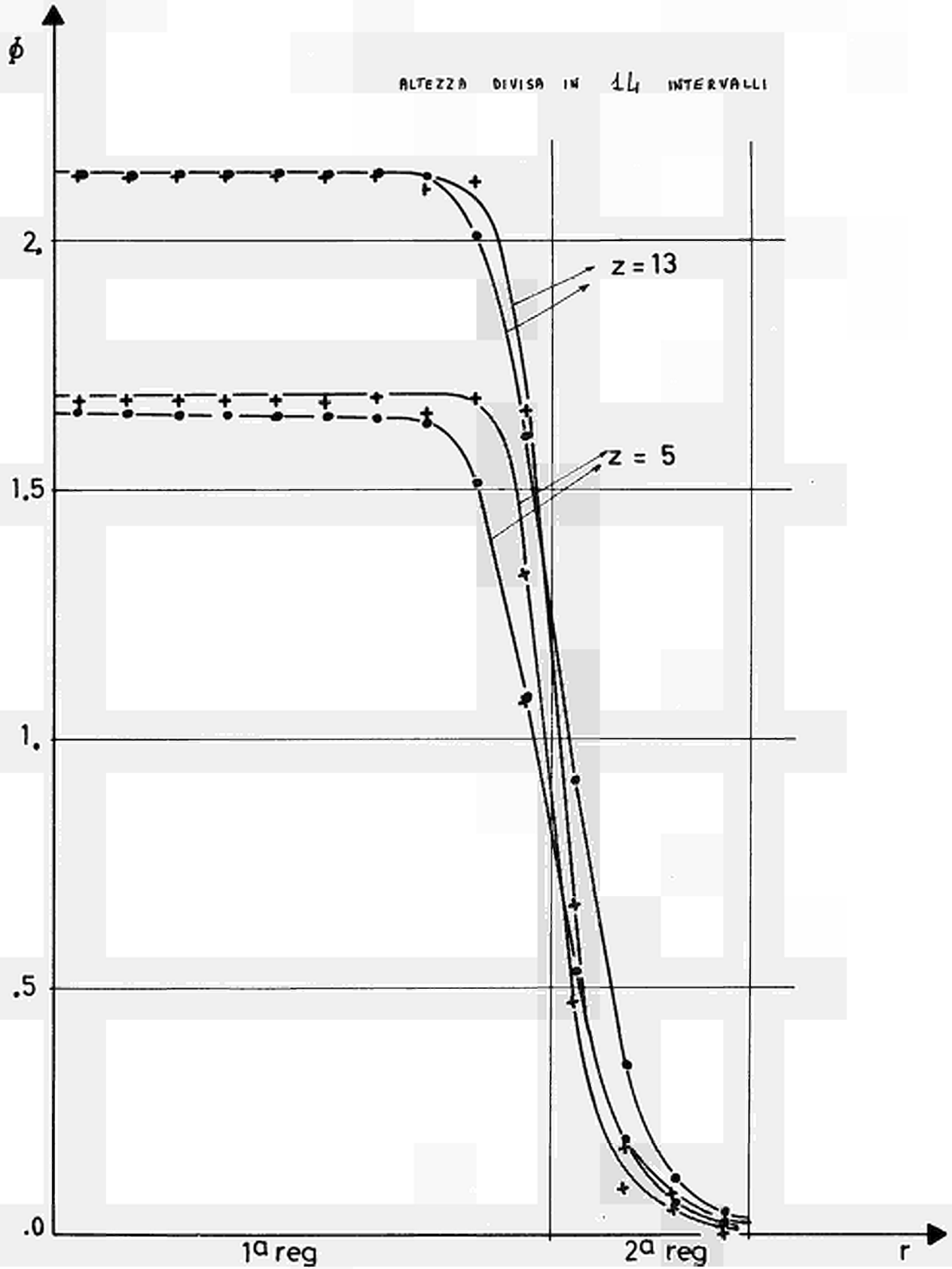
III CASO

x S_n
 • METODO GLOBALE

$\epsilon = 10^{-4}$
 $\epsilon = 10^{-4}$

TEMPO MACCHINA = 0.033h.

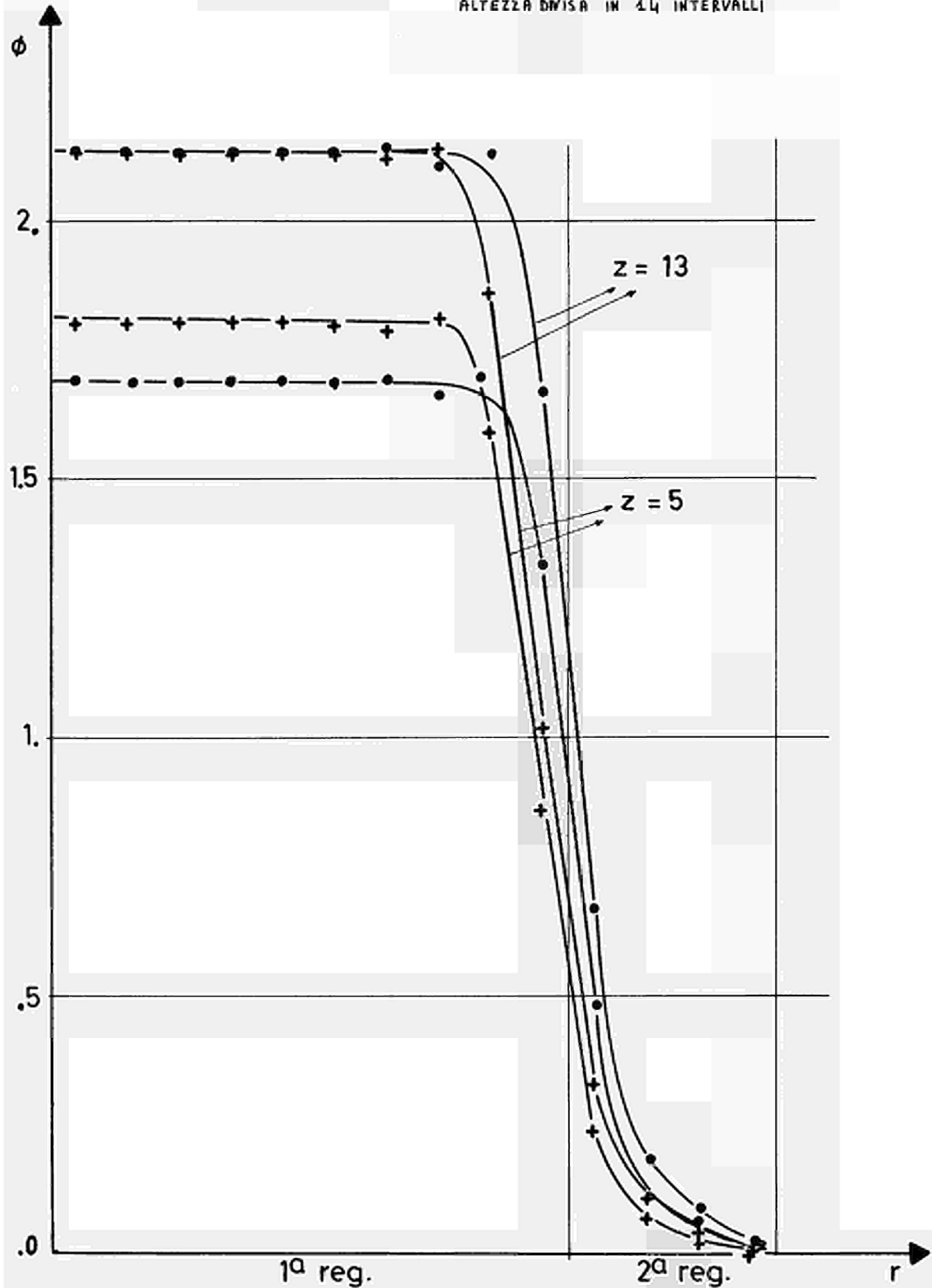
TEMPO MACCHINA = 0.060h.

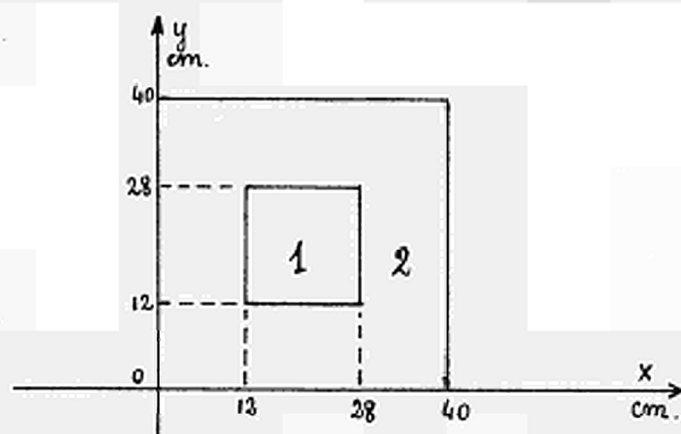
 $\omega = 1.5$ 

CILINDRO FINITO [SORGENTE]

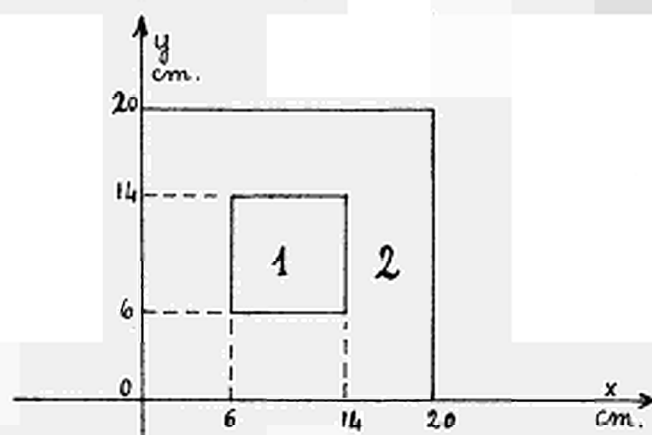
III CASO

x METODO MISTO

 $\epsilon = 10^{-3}$ TEMPO MACCHINA = 0.090h. $\omega = 1.5$
 ALTEZZA DIVISA IN 31 INTERVALLI
• S_n
 $\epsilon = 10^{-4}$ TEMPO MACCHINA = 0.033h.
 ALTEZZA DIVISA IN 14 INTERVALLI


Geometria di sezione rettangolare e altezza infinitaI^o CASO Problema 1N^o REGIONI : 2

Regione	Σ_t	Σ_s	$v\Sigma_f$
1	.663896	.195982	.1
2	.386907	.191751	.0

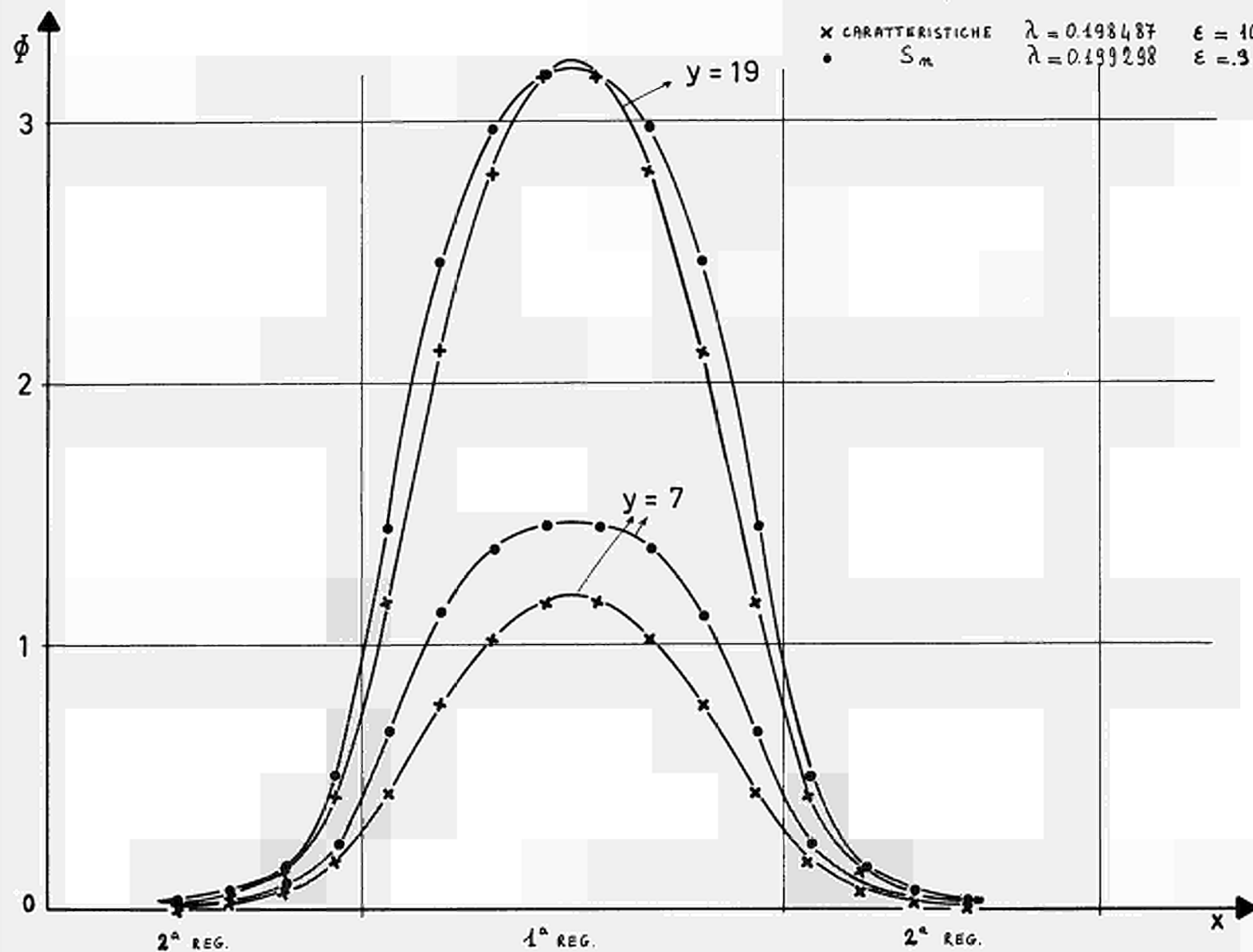
II^o CASO Problema 2N^o REGIONI : 2

Regione	Σ_t	Σ_s	Sorgente
1	.663896	.195982	1.
2	.386907	.191751	0.

I caso

RETTANGOLO DI ALTEZZA INFINITA [AUTOVALORE]

x CARATTERISTICHE $\lambda = 0.198487$ $\epsilon = 10^{-4}$ T.M. = 0.078h. $\omega = 1.5$
• S_m $\lambda = 0.199298$ $\epsilon = 9 \cdot 10^{-2}$ T.M. = 0.130



II caso

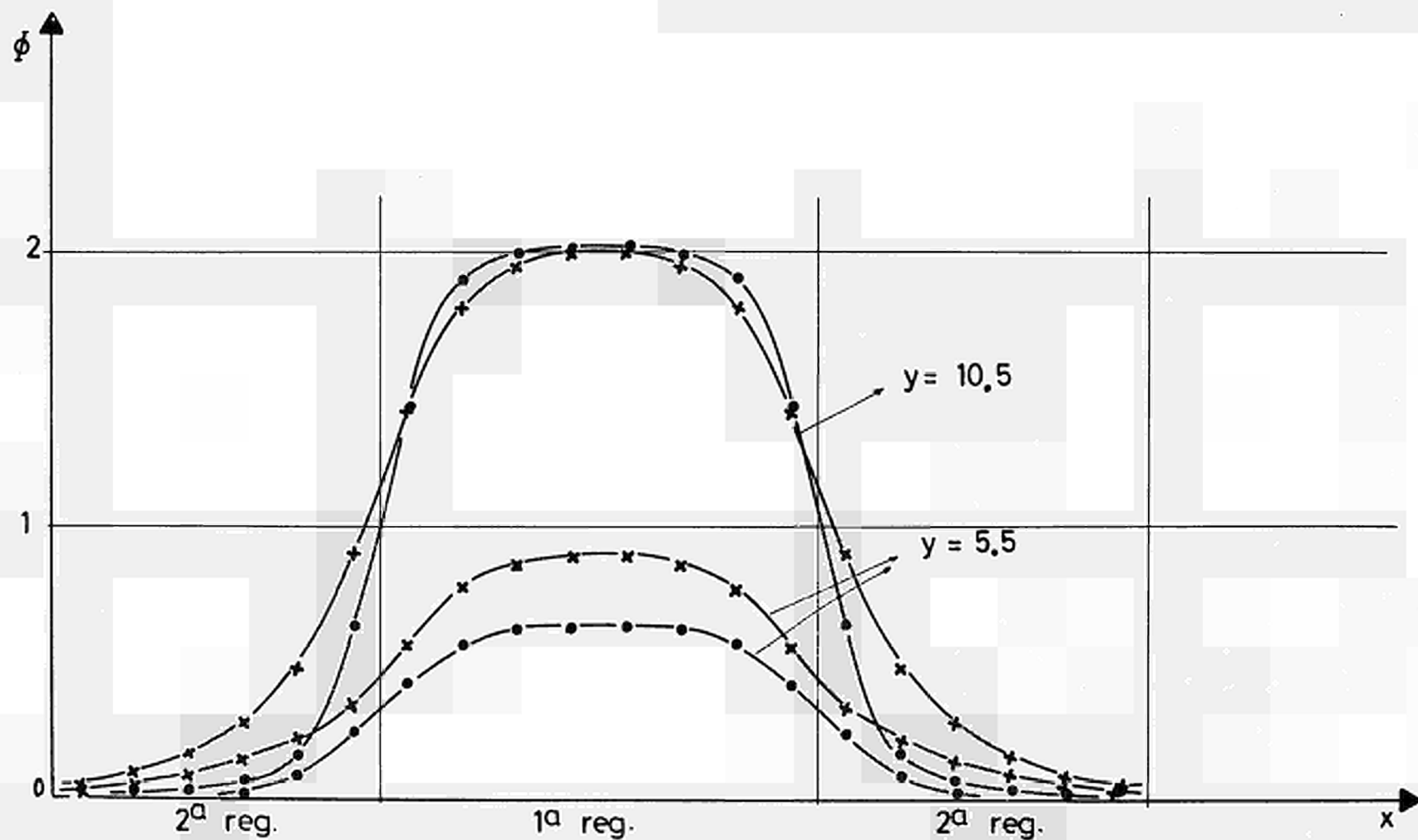
RETTANGOLO DI ALTEZZA INFINITA [SORGENTE]

• S_{π}
x CARATTERISTICHE

$\epsilon = 10^{-4}$
 $= 10^{-4}$

TEMPO MACCHINA = 0.036 h.

TEMPO MACCHINA = 0.020 h. $\omega = 1.5$



Bibliografia

- [1] B.Davison :
Neutron transport theory
Clarendon Press Oxford (1957)

- [2] V.S.Vladimirov
Mathematical problems in the one-velocity theory
of particle transport
AECL-1661 (1963)

- [3] I.G. Marchuk
Methods for nuclear reactor calculations
(in russo) Mockba (1961)
Traduzione Euratom in stampa

- [4] R.S. Varga
Matrix iterative analysis
Prentice Hall, Inc. (1962)

- [5] R.D. Richtmyer
Difference methods for initial-value problems
Interscience publishers Inc. New York (1957)

- [6] H.B.Keller and B.Wendroff
On the formulation and analysis of numerical methods
for time dependent transport equations
Communications on pure and applied mathematics
Vol.X, 567-582 (1957)

- [7] J.H. Bennett
A one-group transport program for x-y geometry
WAPD-TM-482 (1964)

- [8] B.G. Carlson
The numerical theory of neutron transport
Methods in computational physics, vol.1, 1-42 (1963)

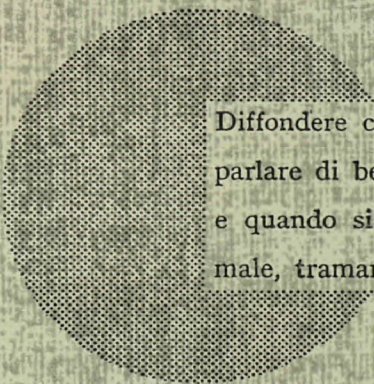
AVVISO AI LETTORI

Tutte le relazioni Euratom sono segnalate, a mano a mano che vengono pubblicate, nel periodico mensile **EURATOM INFORMATION**, edito dal Centro di Informazione e Documentazione (CID). Per abbonamenti (1 anno : Lit. 9.450) e richieste di numeri di saggio, rivolgersi a :

Handelsblatt GmbH
"Euratom Information"
Postfach 1102
D-4 Düsseldorf (Germania)

oppure a

Office de vente des publications
des Communautés européennes
2, Place de Metz
Luxembourg



Diffondere cognizioni equivale a diffondere benessere — intendo parlare di benessere generale e non già di ricchezza individuale — e quando si instaura il benessere va sempre più scomparendo il male, tramandatoci da un oscuro passato.

Alfred Nobel

UFFICI DI VENDITA

Tutte le relazioni Euratom si vendono nei seguenti uffici ai prezzi indicati a tergo della prima pagina della copertina (all'atto dell'ordinazione, indicare chiaramente il riferimento EUR e il titolo della relazione che figurano sulla prima pagina della copertina).

OFFICE CENTRAL DE VENTE DES PUBLICATIONS DES COMMUNAUTES EUROPEENNES

2, place de Metz, Luxembourg (Compte chèque postal N° 191-90)

BELGIQUE — BELGIË

MONITEUR BELGE
40-42, rue de Louvain - Bruxelles
BELGISCH STAATSBAD
Leuvenseweg 40-42, - Brussel

LUXEMBOURG

OFFICE CENTRAL DE VENTE
DES PUBLICATIONS DES
COMMUNAUTES EUROPEENNES
9, rue Goethe - Luxembourg

DEUTSCHLAND

BUNDESANZEIGER
Postfach - Köln 1

NEDERLAND

STAATSDRUKKERIJ
Christoffel Plantijnstraat - Den Haag

FRANCE

SERVICE DE VENTE EN FRANCE
DES PUBLICATIONS DES
COMMUNAUTES EUROPEENNES
26, rue Desaix - Paris 15^e

ITALIA

LIBRERIA DELLO STATO
Piazza G. Verdi, 10 - Roma

UNITED KINGDOM

H. M. STATIONERY OFFICE
P. O. Box 569 - London S.E.1

EURATOM — C.I.D.
51-53, rue Belliard
Bruxelles (Belgique)

CDNA03632ITC