

EUR 876.d

REPRINT

EUROPÄISCHE ATOMGEMEINSCHAFT - EURATOM

ÜBER EINE ANALYTISCHE DARSTELLUNG DES
NEUTRONENFLUSSES IN PLATTENSCHICHTUNGEN

von

K. H. MÜLLER

1965



Gemeinsame Kernforschungsstelle
Forschungsanstalt Ispra - Italien

Hauptabteilung Reaktorphysik
Theorie und Berechnung der Reaktoren Abteilung

Sonderdruck aus
NUKLEONIK
6. Band, 5. Heft - 1964

HINWEIS

Das vorliegende Dokument ist im Rahmen des Forschungsprogramms der Kommission der Europäischen Atomgemeinschaft (EURATOM) ausgearbeitet worden.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Euratomkommission, ihre Vertragspartner und alle in deren Namen handelnden Personen :

- 1^o — keine Gewähr dafür übernehmen, dass die in diesem Dokument enthaltenen Informationen richtig und vollständig sind, oder dass die Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen, oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden und Verfahren nicht gegen gewerbliche Schutzrechte verstößt;
- 2^o — keine Haftung für die Schäden übernehmen, die infolge der Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen, oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden oder Verfahren entstehen könnten.

This reprint is intended for restricted distribution only. It reproduces, by kind permission of the publisher, an article from "NUKLEONIK", 6.Band, 5.Heft - 1964, 271-274. For further copies please apply to Springer-Verlag — 69 Heidelberg 1, Postfach 3027 (Deutschland).

Dieser Sonderdruck ist für eine beschränkte Verteilung bestimmt. Die Wiedergabe des vorliegenden in „NUKLEONIK“, 6.Band, 5.Heft - 1964, 271-274 erschienenen Aufsatzes erfolgt mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers. Bestellungen weiterer Exemplare sind an Springer-Verlag — 69 Heidelberg 1, Postfach 3027 (Deutschland) zu richten.

Ce tiré-à-part est exclusivement destiné à une diffusion restreinte. Il reprend, avec l'aimable autorisation de l'éditeur, un article publié dans «NUKLEONIK», 6.Band, 5.Heft - 1964, 271-274. Tout autre exemplaire de cet article doit être demandé à Springer-Verlag — 69 Heidelberg 1, Postfach 3027 (Deutschland).

Questo estratto è destinato esclusivamente ad una diffusione limitata. Esso è stato riprodotto, per gentile concessione dell'Editore, da «NUKLEONIK», 6.Band, 5.Heft - 1964, 271-274. Ulteriori copie dell'articolo debbono essere richieste a Springer-Verlag — 69 Heidelberg 1, Postfach 3027 (Deutschland).

Deze overdruk is slechts voor beperkte verspreiding bestemd. Het artikel is met welwillende toestemming van de uitgever overgenomen uit „NUKLEONIK“, 6.Band, 5.Heft - 1964, 271-274. Meer exemplaren kunnen besteld worden bij Springer-Verlag — 69 Heidelberg 1, Postfach 3027 (Deutschland).

EUR 876.d

REPRINT

ÜBER EINE ANALYTISCHE DARSTELLUNG DES NEUTRONEN-
FLUSSES IN PLATTENSCHICHTUNGEN, von K.H. MÜLLER.

Europäische Atomgemeinschaft - EURATOM.
Gemeinsame Kernforschungsstelle - Forschungsanstalt Ispra (Italien).
Hauptabteilung Reaktorphysik.
Theorie und Berechnung der Reaktoren Abteilung.
Sonderdruck aus „Nukleonik“.
6. Band, 5. Heft - 1964, S. 271-274.

Die direkte Methode der Variationsrechnung, wird sie auf die Boltzmann-Gleichung für den Neutronentransport angewandt, erlaubt die Konstruktion von analytischen Ausdrücken, vermittels derer sich die Neutronenverteilung im Reaktor auf übersichtliche Weise beschreiben lässt. Für die eindimensionale Plattenschichtung werden drei für die Bearbeitung von Abschirmfragen gut brauchbare Wege aufgezeigt und begangen.

EUR 876.d

REPRINT

STUDY ON AN ANALYTICAL REPRESENTATION OF THE NEUTRON
FLUX IN PLATE LAMINATIONS, by K.H. MÜLLER.

European Atomic Energy Community - EURATOM.
Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy).
Reactor Physics Department.
Reactor Theory and Calculation Service.
Reprinted from "Nukleonik".
6. Band, 5. Heft - 1964, S. 271-274.

The direct variation-calculus method, if applied to the Boltzmann neutron-transport equation, enables analytical expressions to be formulated by means of which the neutron distribution in the reactor can be clearly described. For the unidimensional plate lamination, three methods which lend themselves readily to the solution of shielding questions are adduced and applied.

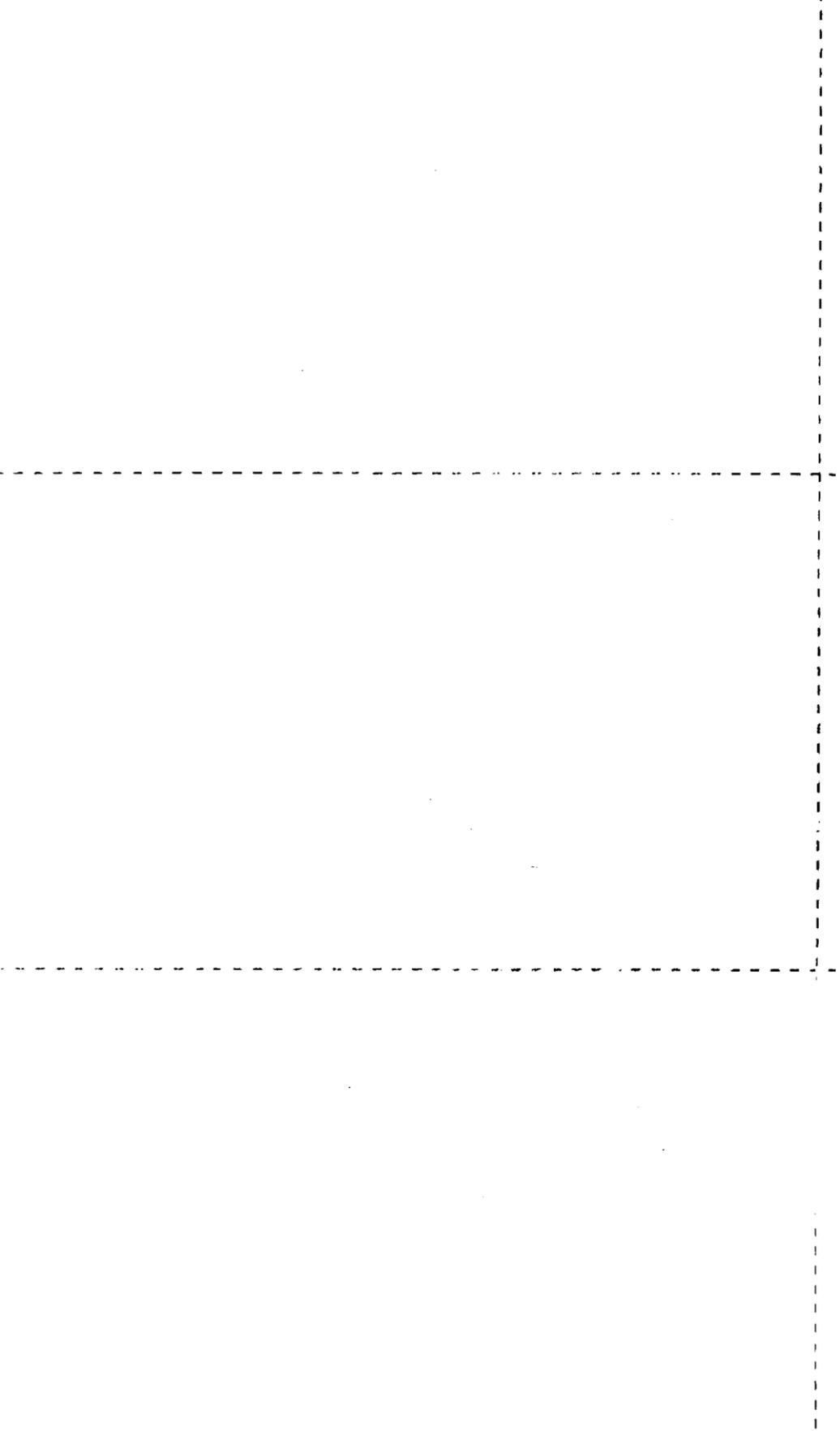
EUR 876.d

REPRINT

STUDY ON AN ANALYTICAL REPRESENTATION OF THE NEUTRON
FLUX IN PLATE LAMINATIONS, by K.H. MÜLLER.

European Atomic Energy Community - EURATOM.
Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy).
Reactor Physics Department.
Reactor Theory and Calculation Service.
Reprinted from "Nukleonik".
6. Band, 5. Heft - 1964, S. 271-274.

The direct variation-calculus method, if applied to the Boltzmann neutron-transport equation, enables analytical expressions to be formulated by means of which the neutron distribution in the reactor can be clearly described. For the unidimensional plate lamination, three methods which lend themselves readily to the solution of shielding questions are adduced and applied.



Über eine analytische Darstellung des Neutronenflusses in Plattenschichtungen

Von **KARL-HEINZ MÜLLER**, Ispra (Italien)¹

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 26. Februar 1964)

Zusammenfassung. Die direkte Methode der Variationsrechnung, wird sie auf die Boltzmann-Gleichung für den Neutronen-transport angewandt, erlaubt die Konstruktion von analytischen Ausdrücken, vermittels derer sich die Neutronenverteilung im Reaktor auf übersichtliche Weise beschreiben läßt. Für die eindimensionale Plattenschichtung werden drei für die Bearbeitung von Abschirmfragen gut brauchbare Wege aufgezeigt und begangen.

Einleitung

Bei der Behandlung von Shielding-Problemen nimmt der Spezialfall der eindimensionalen Plattenschichtung einen zentralen Platz ein. Mit Hilfe der direkten Methode der Variationsrechnung [1] läßt sich für die zugehörige Boltzmann-Gleichung (B.G.) eine analytische Lösung konstruieren, die den wesentlichen Vorzug gegenüber einer numerischen hat: sie ist durch einen geschlossenen Ausdruck darstellbar, der überdies noch freie Parameter enthält.

Wir gehen von der B.G.:

$$\left. \begin{aligned} M\Phi - S &\equiv v \cdot \nabla \Phi + C_1(r, v) \Phi - \\ &- \int C_2(r, v', v) \Phi(r, v') dv' - S(r, v) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

aus mit $v = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = |v| \vec{\Omega}$ (d.h. „Cartesische“ oder

„Polarkoordinaten“-Darstellung des Geschwindigkeitsvektors) und konstruieren für die eindimensionale Plattenschichtung analytische Näherungslösungen. Es

stehen hierzu verschiedene Wege zur Verfügung. Wir wählen davon die uns für das Problem am besten dünkenden aus.

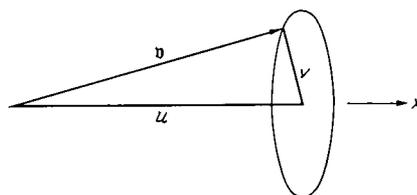


Abb. 1. Zerlegung des Geschwindigkeitsvektors in Axial- und Radialkomponente

a) Cartesische Darstellung (u, v)

Die spezielle Geometrie und die Orientierung der x-Achse parallel der Oberflächennormalen erlaubt die Darstellung der B.G.:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + C_1(x, u, v) \Phi \\ = \pi \int \int C_2(x, u', v', v) \Phi(x, u', v') du' dv' + \\ + S(x, u, v), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹ C.C.R. Euratom, T.C.R.

wobei $v \equiv v^2 + w^2$ und $du' dv' dw' = 2\pi \sqrt{v'^2 + w'^2} \times d\sqrt{v'^2 + w'^2} \cdot du'$. Dieser Form der B.G. ist das Variationsproblem:

$$\delta \iint_{\mathfrak{v}} \Phi^+ [M\Phi - S] du dv = 0 \quad (3)$$

äquivalent, wobei über den gesamten Variationsbereich \mathfrak{v} der Geschwindigkeitskomponenten zu integrieren ist. Der üblichen Prozedur folgend führen wir den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, u, v) &= \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \psi_k(u, v); \\ \Phi^+(x, u, v) &= \sum_{k=1}^N \varphi_k^+(x) \psi_k^+(u, v), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

in (3) ein und erhalten durch die Variation $\Phi^+ \rightarrow \delta \Phi^+$: $\iint \psi_k^+ [M\Phi - S]_k du dv = 0$, d.h. (unter Verwendung der Matrixschreibweise):

$$A \frac{d\Phi(x)}{dx} + B(x) \Phi(x) = S(x). \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \quad (5)$$

Als Auswahlfunktionen schlagen wir vor:

$$\psi_k(u, v) \equiv \psi_k^+(u, v) = \chi(u^2 + v) u^\alpha v^\lambda$$

α, λ ganzzahlig, χ : bei $x=0$ vermutetes Energiespektrum.

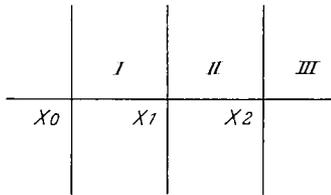


Abb. 2. Parallelschichtung von mehreren in sich homogenen Platten

Im Spezialfall einer einzelnen in sich homogenen Schicht ist $B(x) = B = \text{const}$ und die Lösung von (5):

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= e^{-(A^{-1}B)(x-x_0)} \times \\ &\times \left[\Phi(x_0) + \int_{x_0}^x e^{(A^{-1}B)(\xi-x_0)} A^{-1} S(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Über die Sylvestersche Formel findet man hierzu leicht die korrespondierende Skalarform.

Bei einem System aus zwei oder mehreren (L) in sich homogenen Schichten verknüpft man die für jede Einzelschicht geltende Lösung mit der ihres Nachbarn durch die Forderung: Stetigkeit des Flusses an der Trennfläche, d.h.

$$\Phi_I(x_1) = \Phi_{II}(x_1); \quad \Phi_{II}(x_2) = \Phi_{III}(x_2); \dots \quad (7)$$

Die gesamte Schichtung denken wir uns in Luft oder auch in einen starken Absorber eingebettet. Für den Außenraum genügt der Fluß den Abklingbedingungen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_0(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_{L+1}(x) = 0. \quad (8)$$

Dies sind also unsere Randbedingungen.

Der Übersicht wegen wollen wir hier noch die Skalarform von (5) anschreiben. Die Integration gemäß (3) und die Variation bringt:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N [\alpha_{ik} \frac{d\varphi_k}{dx} + \beta'_{ik}(x) \varphi_k - \beta''_{ik}(x) \varphi_k] &= S_i(x) \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{ik} &= \iint_{\mathfrak{v}} u \cdot \psi_i^+(u, v) \psi_k(u, v) du dv; \\ S_i(x) &= \iint_{\mathfrak{v}} \psi_i^+(u, v) S(x, u, v) du dv \\ \beta'_{ik}(x) &= \iint_{\mathfrak{v}} C_1(x, u, v) \psi_k^+(u, v) \psi_k(u, v) du dv \\ \beta''_{ik}(x) &= \pi \iint_{\mathfrak{v}} \iint_{\mathfrak{v}} C_2(x, u', u, v', v) \psi_i^+(u, v) \times \\ &\times \psi_k(u', v') du dv' du dv. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Bei der homogenen Einzelschicht ist $C_1(x, u, v) = C_1(u, v)$; $C_2(x, u', v', u, v) = C_2(u', u, v', v)$, also β'_{ik} und β''_{ik} Konstanten. (9) stellt nun ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten dar, das durch elementare Exponentialfunktionen gelöst wird. Das Problem ist also auf die Auswertung von Integralen zusammengeschrumpft.

b) Polarkoordinatendarstellung (E, μ)

Dieser zweite Weg hat nur dann eine praktische Bedeutung, wenn bei anisotroper Streuung angenommen werden darf:

$$\left. \begin{aligned} C_2(x, E', E, \mu', \mu) &= \sum_{k=1}^N b'_k(x, E', E, \mu) \times \\ &\times b''_k(x, E', E, \mu'). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Im allgemeinsten Falle ist diese Methode etwas schwerfällig. Das zu:

$$\left. \begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + C_1(x, E) \Phi - \\ - \int_{-1}^{+1} \int_{aE}^E C_2(x, E', E, \mu', \mu) \Phi(x, E', \mu') dE' d\mu' - \\ - S(x, E, \mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

äquivalente Variationsproblem:

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \Phi^+ [M\Phi - S] dE dx = 0 \quad (13)$$

lösen wir mit Hilfe des Ansatzes:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, E, \mu) &= \sum_{k=1}^N \varphi_k(\mu) \psi_k(x, E); \\ \Phi^+(x, E, \mu) &= \sum_{k=1}^N \varphi_k^+(\mu) \psi_k^+(x, E). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Integration und Variation bringen nun:

$$\iint \psi_i^+ [M\Phi - S]_k dE dx = 0,$$

d.h.

$$A(\mu) \Phi(\mu) - \int_{-1}^{+1} B(\mu, \mu') \Phi(\mu') d\mu' = S(\mu),$$

$$\Phi(\mu) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix},$$

oder mit (11):

$$A(\mu) \Phi(\mu) = B'(\mu) \int_{-1}^{+1} B''(\mu') \Phi(\mu') d\mu' + S(\mu). \quad (15)$$

Die Lösung ist gegeben durch:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\mu) &= A^{-1} \left\{ B' \left[I - \int_{-1}^{+1} B''(\mu') A^{-1}(\mu') B'(\mu') d\mu' \right]^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \int_{-1}^{+1} B''(\mu') A^{-1}(\mu') S(\mu') d\mu' + S(\mu) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die zu (15) gehörige Skalarform lautet:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^N [(\mu \alpha'_{ik} + \alpha''_{ik}) \varphi_k - \int_{-1}^{+1} \beta_{ik}(\mu', \mu) \varphi_k(\mu') d\mu'] \\ = S_i(\mu) \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} (17)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \psi_i^+(x, E) \frac{\partial \varphi_k(x, E)}{\partial x} dE dx; \\ \alpha''_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} C_1(x, E) \psi_i^+(x, E) \varphi_k(x, E) dE dx; \\ \beta_{ik} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^E C_2(x, E', E, \mu', \mu) \psi_i^+(x, E) \times \\ &\quad \times \varphi_k(x, E') dE' dE dx; \\ S_i(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} S(x, E, \mu) \psi_i^+(x, E) dE dx. \end{aligned} \right\} (18)$$

Über die Matrizenrechnung findet man aus (17):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k(\mu) = \int_{-1}^{+1} \sum_{k=1}^N \gamma_{ki}(\mu', \mu) \varphi_i(\mu') d\mu' + \sigma_k(\mu) \\ i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right\} (19)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_{ki}(\mu', \mu) &= [A^{-1}(\mu) B'(\mu) B''(\mu')]_{ki}; \\ \sigma_k(\mu) &= [A^{-1}(\mu) S(\mu)]_k. \end{aligned}$$

Das System (19) unterwirft man nun einer Mikhlin-Transformation [2]. Der Kern der Transformierten ist ausgeartet. Wir können also erneut Mikhlin-transformieren. Die nun resultierende Integralgleichung hat einen Produktkern; sie läßt sich geschlossen lösen.

Da wir so die $\varphi_k(\mu)$ auf einfache Weise analytisch darstellen können, liefert dieser Weg also auch ein für die praktische Rechnung gut geeignetes Integrationsverfahren für die B.G.

c) Polarkoordinatendarstellung (E, μ)

Die im folgenden ausgeführte Methode benützt Gedanken aus den beiden vorausgehenden Abschnitten. Auf das zur Darstellung (12) der B.G. äquivalente Variationsproblem:

$$\delta \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} \Phi^+ [M \Phi - S] d\mu dE = 0 \quad (20)$$

wenden wir den Ansatz

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, E, \mu) &= \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \varphi_k(E, \mu); \\ \Phi^+(x, E, \mu) &= \sum_{k=1}^N \varphi_k^+(x) \varphi_k^+(E, \mu) \end{aligned} \right\} (21)$$

an. Der Vektor $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$ genügt dann einer reduzierten B.G. vom Typus (5), bzw. seine Komponenten

φ_k dem Differentialgleichungssystem (9), wo aber jetzt

$$\begin{aligned} \alpha_{ik} &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{\infty} \mu |\overline{2E} \psi_i^+(E, \mu) \cdot \varphi_k(E, \mu) dE d\mu \\ S_i(x) &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{\infty} \psi_i^+(E, \mu) S(x, E, \mu) dE d\mu \\ \beta'_{ik}(x) &= \int_{-1}^{+1} \int_0^{\infty} C_1(x, E) \psi_i^+(E, \mu) \varphi_k(E, \mu) dE d\mu \\ \beta''_{ik}(x) &= \int_{-1}^{+1} \int_0^E \int_0^E C_2(x, E', E, \mu', \mu) \psi_i^+(E, \mu) \times \\ &\quad \times \varphi_k(E', \mu') d\mu' d\mu dE' dE \end{aligned}$$

einzusetzen ist. Bei einer Schichtung aus mehreren in sich homogenen Platten wird man Differentialgleichung (5) bzw. System (9) für jede homogene Schicht einzeln integrieren, d.h. in (6) bzw. in die dazugehörige Skalarform, die jetzt konstanten Werte $\alpha_{ik}, \beta'_{ik}, \beta''_{ik}$

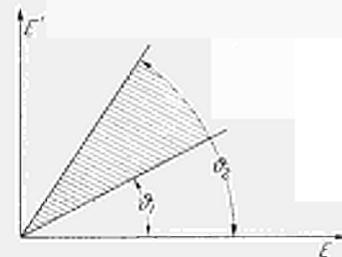


Abb. 3. Keilförmiger Variationsbereich der auftretenden Energien

(für jede Schicht aus den entsprechenden C_1 und C_2 errechnet!) einsetzen. Danach die $\varphi_k(x)$ über (7) miteinander verketteten.

Als Auswahlfunktion könnte man

$$\varphi_k(E, \mu) = \psi_k^+(E, \mu) = \chi(E) E^m P_n(\mu)$$

verwenden mit m, n ganzzahlig und $\chi(E)$ Spalt-spektrum, falls $S(x, E, \mu) =$ Spaltquelle.

Beispiel.

$$N = 10, \chi(E) = 0,848e^{-E} \sinh |2E|, \psi_k^+ = \varphi_k$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, E, \mu) &= \chi(E) [q_1(x) P_0 + q_2(x) E P_0 + q_3(x) P_1 + \\ &\quad + q_4(x) E^2 P_0 + q_5(x) E P_1 + q_6(x) P_2 + \\ &\quad + q_7(x) E^3 P_0 + \dots] \end{aligned}$$

$$\psi_5^+(E, \mu) = \chi(E) E P_1(\mu); \quad \psi_7^+(E, \mu) = \chi(E) E^3 P_0(\mu)$$

$$\alpha_{57} = \int_{-1}^{+1} \mu P_1(\mu) d\mu \int_0^{\infty} \chi^2(E) E^3 dE;$$

$$\beta'_{57} = \int_{-1}^{+1} P_0(\mu) P_1(\mu) d\mu \int_0^{\infty} C_1(E) \chi^2(E) E^3 dE;$$

$$\begin{aligned} \beta''_{57} &= \int_0^E \int_0^E \chi(E') \chi(E) E'^3 E^3 \int_{-1}^{+1} C_2(E', E, \mu', \mu) \times \\ &\quad \times P_0(\mu') P_1(\mu) d\mu' d\mu dE' dE. \end{aligned}$$

Es handelt sich hier also um Laplace-Integrale, die man mit Hilfe einer gebräuchlichen Tabelle z.B. [3] auswerten kann.

Bei der Errechnung von β''_{ik} empfiehlt es sich, die Transformation

$$E = \varrho \cos \vartheta, \quad E' = \varrho \sin \vartheta, \quad dE' dE = \varrho d\varrho d\vartheta$$

vorzunehmen. Dadurch gehen wir von den teilweise *variablen* Integrationsgrenzen auf völlig *fixe* Grenzen über. Der Integrationsbereich (E, E') ist nämlich keilförmig:

$$\beta''_{ik} = \iint_{-1}^{+1} d\mu' d\mu \int_0^{\infty} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \bar{C}_2(\varrho, \vartheta, \mu', \mu) \psi_i^+(\varrho \sin \vartheta, \mu) \times \\ \times \psi_k(\varrho \cos \vartheta, \mu') \varrho d\varrho d\vartheta$$

mit

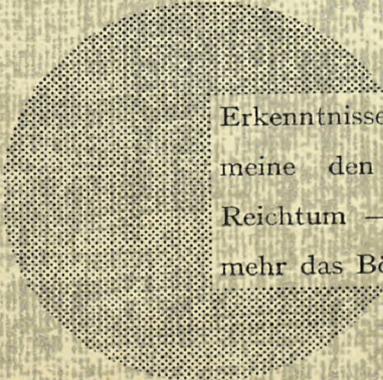
$$\bar{C}_2(\varrho, \vartheta, \mu', \mu) = C_2(E', E, \mu', \mu).$$

Bemerkung

Die hier dargelegten Methoden werden zu einem leicht handhabbaren Hilfsmittel bei der Beantwortung von Abschirmfragen, wenn die Materialkenngrößen C_1 und C_2 in Tabellenform vorliegen.

Literatur: [1] FUNK, P.: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Berlin 1962. — [2] MIKHILIN: Integral Equations. London 1957. — [3] ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER and TRICOMI: Tables of Integral Transforms, vol. 1. New York 1954.

Anschrift: Dr. KARL-HEINZ MÜLLER
Via Italia 14—16
Cardana-Besozzo/Italien



Erkenntnisse verbreiten ist soviel wie Wohlstand verbreiten — ich meine den allgemeinen Wohlstand, nicht den individuellen Reichtum — denn mit dem Wohlstand verschwindet mehr und mehr das Böse, das uns aus dunkler Zeit vererbt ist.

Alfred Nobel

CDNA00876DEC