

**EUR 396.d**

REPRINT

Assoziierung EURATOM - C.E.A.  
(Europäische Atomgemeinschaft und  
Commissariat à l'Énergie Atomique)

ZUR SPEKTROSKOPISCHEN TEMPERATUR-  
UND DICHTEMESSUNG VON PLASMEN  
BEI ABWESENHEIT  
THERMODYNAMISCHEN GLEICHGEWICHTES

von

H.W. DRAWIN  
(Euratom)

1963



Bericht abgefasst im Rahmen des Euratom Vertrages Nr. 007-62-1 FUAF

Sonderdruck aus  
ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK  
Band 172, Heft 4 - 1963

## HINWEIS

Das vorliegende Dokument ist im Rahmen des Forschungsprogramms der Kommission der Europäischen Atomgemeinschaft (EURATOM) ausgearbeitet worden.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Euratomkommission, ihre Vertragspartner und alle in deren Namen handelnden Personen:

- 1<sup>o</sup> — keine Gewähr dafür übernehmen, dass die in diesem Dokument enthaltenen Informationen richtig und vollständig sind oder dass die Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden und Verfahren nicht gegen gewerbliche Schutzrechte verstößt;
- 2<sup>o</sup> — keine Haftung für die Schäden übernehmen, die infolge der Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden oder Verfahren entstehen könnten.

*This reprint is intended for restricted distribution only. It reproduces, by kind permission of the publisher, an article from "ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK", Band 172, Heft 4 - 1963, 429-452. For further copies please apply to Springer - Verlag, Heidelberger Platz 3 - 1 Berlin (Wilmersdorf) (Deutschland).*

*Dieser Sonderdruck ist für eine beschränkte Verteilung bestimmt. Die Wiedergabe des vorliegenden in „ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK“, Band 172, Heft 4 - 1963, 429-452 erschienenen Aufsatzes erfolgt mit freundlicher Genehmigung des Herausgebers. Bestellungen weiterer Exemplaren sind an Springer - Verlag, Heidelberger Platz 3 - 1 Berlin (Wilmersdorf) (Deutschland) zu richten.*

*Ce tiré-à-part est exclusivement destiné à une diffusion restreinte. Il reprend, avec l'aimable autorisation de l'éditeur, un article publié dans «ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK», Band 172, Heft 4 - 1963, 429-452. Tout autre exemplaire de cet article doit être demandé à Springer - Verlag, Heidelberger Platz 3 - 1 Berlin (Wilmersdorf) (Deutschland).*

*Questo estratto è destinato esclusivamente ad una diffusione limitata. Esso è stato riprodotto, per gentile concessione dell'Editore, da «ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK», Band 172, Heft 4 - 1963, 429-452. Ulteriori copie dell'articolo debbono essere richieste a Springer - Verlag, Heidelberger Platz 3 - 1 Berlin (Wilmersdorf) (Deutschland).*

*Deze overdruk is slechts voor beperkte verspreiding bestemd. Het artikel is met welwillende toestemming van de uitgever overgenomen uit „ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK“, Band 172, Heft 4 - 1963, 429-452. Meer exemplaren kunnen besteld worden bij Springer - Verlag, Heidelberger Platz 3 - 1 Berlin (Wilmersdorf) (Deutschland).*

**EUR 396.d**

REPRINT

ZUR SPEKTROSKOPISCHEN TEMPERATUR- UND DICHTEMESSUNG VON PLASMEN BEI ABWESENHEIT THERMODYNAMISCHEN GLEICHGEWICHTES von H.W. DRAWIN (Euratom).

Assoziierung EURATOM - C.E.A.

(Europäische Atomgemeinschaft - Commissariat à l'Énergie Atomique).

Bericht abgefasst im Rahmen des Euratom Vertrages Nr. 007-62-1 FUAF.

Sonderdruck aus „ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK“, Band 172, Heft 4 - 1963, S. 429-452.

Nach Erörterung der Ionisierungsformeln für ein stationäres und ein im Übergangszustand befindliches Plasma mit oder ohne thermodynamisches Gleichgewicht wird nachgewiesen, dass für die praktische Anwendung dieser Formeln in besonderen Fällen die Einführung einer nicht-Maxwellschen Verteilungsfunktion für die Elektronengeschwindigkeiten erforderlich ist, weil die Elektronen aus dem Plasma entweichen können, ohne eine hinreichende grosse Zahl von Ionisierungstreffern zu erzielen. Die Auswirkung sowohl der „Maxwell“- als auch der „Druyvesteyn“- Verteilung auf die Anregungs-

**EUR 396.d**

REPRINT

SPECTROSCOPIC TEMPERATURE AND DENSITY MEASUREMENT IN THE ABSENCE OF THERMO DYNAMIC EQUILIBRIUM by H.W. DRAWIN (Euratom).

Association EURATOM - C.E.A.

(European Atomic Energy Community - Commissariat à l'Énergie Atomique).

Work performed under the Euratom contract No. 007-62-1 FUAF.

Reprinted from "ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK", Vol. 172, No. 4 - 1963, pages 429-452.

After a discussion of the ionization formulae for both a steady-state and a transient plasma with and without thermodynamic equilibrium it is shown that for the practical application of these formulae the introduction of a non-Maxwellian velocity distribution function for the electrons is necessary in special cases, because the electrons can escape from the plasma without effecting a sufficiently high number of ionizing impacts. The influence of both the "Maxwell"- and the "Druyvesteyn"- distribution on the excitation, ionization, and recombination processes is treated quantitatively. The modification

**EUR 396.d**

REPRINT

SPECTROSCOPIC TEMPERATURE AND DENSITY MEASUREMENT IN THE ABSENCE OF THERMO DYNAMIC EQUILIBRIUM by H.W. DRAWIN (Euratom).

Association EURATOM - C.E.A.

(European Atomic Energy Community - Commissariat à l'Énergie Atomique).

Work performed under the Euratom contract No. 007-62-1 FUAF.

Reprinted from "ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK", Vol. 172, No. 4 - 1963, pages 429-452.

After a discussion of the ionization formulae for both a steady-state and a transient plasma with and without thermodynamic equilibrium it is shown that for the practical application of these formulae the introduction of a non-Maxwellian velocity distribution function for the electrons is necessary in special cases, because the electrons can escape from the plasma without effecting a sufficiently high number of ionizing impacts. The influence of both the "Maxwell"- and the "Druyvesteyn"- distribution on the excitation, ionization, and recombination processes is treated quantitatively. The modification

**EUR 396.d**

REPRINT

SPECTROSCOPIC TEMPERATURE AND DENSITY MEASUREMENT IN THE ABSENCE OF THERMO DYNAMIC EQUILIBRIUM by H.W. DRAWIN (Euratom).

Association EURATOM - C.E.A.

(European Atomic Energy Community - Commissariat à l'Énergie Atomique).

Work performed under the Euratom contract No. 007-62-1 FUAF.

Reprinted from "ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK", Vol. 172, No. 4 - 1963, pages 429-452.

After a discussion of the ionization formulae for both a steady-state and a transient plasma with and without thermodynamic equilibrium it is shown that for the practical application of these formulae the introduction of a non-Maxwellian velocity distribution function for the electrons is necessary in special cases, because the electrons can escape from the plasma without effecting a sufficiently high number of ionizing impacts. The influence of both the "Maxwell"- and the "Druyvesteyn"- distribution on the excitation, ionization, and recombination processes is treated quantitatively. The modification

Ionisierungs- und Rekombinationsprozesse wird quantitativ behandelt. Die Modifizierung der Ionisierungsformel aufgrund der Dreierstoss-Rekombination mit Übergang in angeregte Zustände wird erörtert. Es wird hervorgehoben, dass die normalerweise nicht bekannte Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen durch Messung der Rekombinations-Kontinua von frei-gebunden-Übergängen ermittelt werden kann.

of the ionization formula due to three-body collisional recombination into excited states is discussed. It is emphasized that the normally unknown velocity distribution of the electrons can be obtained by measuring the free-bound recombination continua.

of the ionization formula due to three-body collisional recombination into excited states is discussed. It is emphasized that the normally unknown velocity distribution of the electrons can be obtained by measuring the free-bound recombination continua.

of the ionization formula due to three-body collisional recombination into excited states is discussed. It is emphasized that the normally unknown velocity distribution of the electrons can be obtained by measuring the free-bound recombination continua.

Groupe de Recherches de l'Association EURATOM-CEA  
sur la Fusion Contrôlée, Fontenay-aux-Roses (Seine) France

## **Zur spektroskopischen Temperatur- und Dichtemessung von Plasmen bei Abwesenheit thermodynamischen Gleichgewichtes\***

Von

HANS-WERNER DRAWIN

Mit 6 Figuren im Text

*(Eingegangen am 17. September 1962)*

After a discussion of the ionization formulae for both a steady-state and a transient plasma with and without thermodynamic equilibrium it is shown that for the practical application of these formulae the introduction of a non-Maxwellian velocity distribution function for the electrons is necessary in special cases, because the electrons can escape from the plasma without effecting a sufficiently high number of ionizing impacts. The influence of both the "Maxwell"- and the "Druyvesteyn"-distribution on the excitation, ionization, and recombination processes is treated quantitatively. The modification of the ionization formula due to three-body collisional recombination into excited states is discussed. It is emphasized that the normally unknown velocity distribution of the electrons can be obtained by measuring the free-bound recombination continua.

### **Einleitung**

Jede spektroskopische Temperatur- und Teilchendichte-Bestimmung bei thermodynamischem Gleichgewicht beruht einerseits auf der Annahme einer Maxwell-Verteilung der Elektronen (und Ionen) und andererseits einer Boltzmann-Verteilung der angeregten Niveaus. Beide Annahmen sind im allgemeinen bei dichten Plasmen nicht zu hoher Temperatur erfüllt. Weicht jedoch der Plasmazustand mehr und mehr vom thermodynamischen Gleichgewicht ab, so werden die Verteilungen der angeregten Niveaus mehr und mehr von einer Boltzmann-Verteilung abweichen. Außerdem übersteigt die Elektronentemperatur in den meisten Fällen die Ionentemperatur. Man nimmt dabei an, daß die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen eine Maxwell-Verteilung bleibt. Neuere Messungen von verschiedenen Forschern haben jedoch in letzter Zeit gezeigt, daß die Annahme einer Maxwell-Verteilung nicht in allen Fällen zulässig ist, sondern sich von einer Maxwell-Verteilung erheblich abweichende Geschwindigkeitsverteilungen der Elektronen einstellen können. Diese neuen Geschwindigkeitsverteilungen der

\* Gekürzte Veröffentlichung des Rapports EUR-CEA-FC-178, Fontenay-aux-Roses, Juli 1962.

Elektronen haben andere Anregungs- und Ionisierungsprozesse zur Folge und beeinflussen damit insbesondere spektroskopische Temperatur- und Dichtebestimmungen. Insbesondere geht die Geschwindigkeitsverteilung direkt in die Anregungs- und Ionisierungsfunktion ein.

Es wird das Abfließen der energetischen Elektronenkomponente aus dem Plasma diskutiert und gezeigt, daß ein merklicher Prozentsatz der energetischen Elektronen aus dem Plasma entweichen kann. Die Geschwindigkeitsverteilungen können sich damit einer Druyvesteyn-Verteilung nähern. Der Einfluß dieser Verteilungen auf die Anregungs- und Ionisationsformeln wird näher behandelt und numerisch durchgerechnet. Weiterhin wird die Dreierstoß-Rekombination in angeregte Zustände quantitativ behandelt.

Die auf dem Mercury-computer berechneten Ionisations- und Rekombinationsquerschnitte für Maxwell- und Druyvesteyn-Verteilung der Elektronen sind in umfangreichen Tabellen in <sup>1-3</sup> zugänglich, wo ebenfalls weitere Einzelheiten zu finden sind. Im folgenden werden die wichtigsten Resultate der Untersuchungen mitgeteilt.

### Allgemeine Ionisationsformeln

Solange in einem Plasma (lokales) thermisches Gleichgewicht vorliegt ist das Verhältnis der Teilchendichten  $n$  zweier aufeinander folgender Ionisationsstufen  $r$  und  $(r+1)$  durch die bekannte Saha-Eggert-Gleichung gegeben

$$S_r(T) = \frac{n_{r+1} n_e}{n_r} = \frac{2 u_{r+1}(T)}{u_r(T)} \cdot \frac{(2\pi m_0 k T)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{E_r - \Delta E_r}{kT}} \quad (1)$$

mit  $n_e, n_{r+1}, n_r =$  Teilchendichten [ $\text{cm}^{-3}$ ],  
 $u_{r+1}(T), u_r(T) =$  Zustandssummen,  
 $T =$  Temperatur [ $^{\circ}\text{K}$ ],  
 $E_r =$  Ionisierungsenergie [erg],  
 $\Delta E_r =$  Korrektionswert als Folge elektrischer Mikrofelder [erg].

Numerische Werte der Gl. (1) für fast alle Elemente und Ionisationsstufen bis zu Ionisationsenergien von etwa 100 eV findet man in <sup>4</sup>.

<sup>1</sup> DRAWIN, H.-W.: Rapport EUR-CEA-FC-178, Fontenay-aux-Roses, Juli 1962.

<sup>2</sup> DRAWIN, H.-W., and P. FELENBOK: Spectroscopical Quantities and Formulas. Interne Publikation der Assoc. EURATOM-CEA, Service Fusion Controlée, Fontenay-aux-Roses (to be publ.).

<sup>3</sup> DRAWIN, H.-W.: Rapport EUR-CEA-FC-190, Fontenay-aux-Roses (to be publ.).

<sup>4</sup> DRAWIN, H.-W., and P. FELENBOK: Numerical Values of Saha-Eggert-Equations. Internal publication of the Association EURATOM-CEA, Fontenay-aux-Roses, July 1962.

Die Gl. (1) ist nicht mehr gültig, wenn Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht eintreten. Man hat dann vielmehr die elementaren Stoßprozesse einzeln zu betrachten und kann daraus dann im stationären Zustand (steady-state condition) zu einer Ionisationsformel gelangen, indem man die verschiedenen Ionisierungs- und Rekombinationsprozesse miteinander ins Gleichgewicht setzt. In allgemeiner Form lautet die Ionisationsgleichung dann, wie man durch eine Betrachtung des detaillierten Gleichgewichtes leicht zeigen kann<sup>5</sup>

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{S_i(T) + \frac{4\pi}{n_e} \int_{\nu_r}^{\infty} \psi_r(\nu) \mathfrak{I}(\nu) d\nu}{Q_3(T) + \frac{1}{n_e} \left( Q_R(T) + \int_{\nu} Q_{id}(T^*) \mathfrak{I}(\nu) d\nu \right)} \quad (2)$$

- mit  $S_i(T)$  = totaler Ionisationsquerschnitt gegenüber Elektronenstoß, summiert über alle Zustände  $n$ .  
 $\psi_r(\nu)$  = differentieller Ionisationsquerschnitt für Photoionisation.  
 $\mathfrak{I}(\nu)$  = Intensität des Strahlungsfeldes bei der Frequenz  $\nu$ .  
 $Q_3(T)$  = totaler Rekombinationsquerschnitt gegenüber Dreierstoß-Rekombination (einschließlich der kombinierten Dreierstoß-Strahlungsrekombination), summiert über alle Zustände  $n$ .  
 $Q_R(T)$  = totaler Rekombinationsquerschnitt für spontane Rekombination eines  $(r+1)$ -fach geladenen Ions mit einem Elektron, summiert über alle Zustände  $n$ .  
 $Q_{id}(T^*)$  = totaler Rekombinationsquerschnitt für durch Strahlung induzierte Rekombination.  
 $T^*$  = Temperatur des Strahlungsfeldes.

Ist das Strahlungsfeld jedoch so stark verdünnt, so daß die Photoionisation gegenüber der Stoßionisation vernachlässigbar klein ist, so gilt unter stationären Bedingungen

$$\frac{n_{r+1}n_e}{n_r} = \frac{S_i(T)}{Q_3(T) + \frac{1}{n_e} Q_R(T)} \quad (3)$$

Diese Formel geht weiter bei vernachlässigbar kleiner Dreierstoß-Rekombination im Falle geringer Dichten in die von  $n_e$  unabhängige Ionisationsformel über

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = \frac{S_i(T)}{Q_R(T)} \quad (4)$$

<sup>5</sup> DEWAN, E. M.: Phys. Fluids 4, 759 (1961).

Gl. (4) wurde z. B. von BIERMANN<sup>6</sup>, LÜST et al.<sup>7</sup>, WOOLLEY and ALLEN<sup>8</sup>, MIYAMOTO<sup>9</sup> und ELWERT<sup>10</sup> auf das Ionisationsgleichgewicht in der Sonnenkorona angewendet, und von KNORR<sup>11</sup> und SCHLÜTER<sup>12</sup> auf die Berechnung des Plasmazustandes von Laboratoriumsplasmen übertragen.

Liegt kein Gleichgewichtszustand vor, so hat man an Stelle von Gl. (2) eine von der Zeit  $t$  abhängige Differentialgleichung zwischen den verschiedenen Teilchendichten  $n_{r-1}$ ,  $n_r$ ,  $n_{r+1}$  und der Elektronendichte  $n_e$ , die man durch die Betrachtung der einzelnen Ionisations- und Rekombinationsprozesse erhält, und die in allgemeiner Form lautet

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_r}{dt} = & - n_r \left[ n_e S_{i,r}(T) + \frac{4\pi}{n_e} \int_{\nu_r}^{\infty} \psi_r(\nu) \mathfrak{I}(\nu) d\nu \right] - \\ & - n_r \left[ n_e Q_{3,r}(T) + \frac{1}{n_e} \left( Q_{R,r}(T) + \int Q_{id,r} \mathfrak{I}(\nu) d\nu \right) \right] + \\ & + n_{r-1} \left[ n_e S_{i,r-1}(T) + \frac{4\pi}{n_e} \int_{\nu_{r-1}}^{\infty} \psi_{r-1}(\nu) \mathfrak{I}(\nu) d\nu \right] + \\ & + n_{r+1} \left[ n_e Q_{3,r+1}(T) + \frac{1}{n_e} \left( Q_{R,r+1}(T) + \int Q_{id,r+1} \mathfrak{I}(\nu) d\nu \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

In dieser Gleichung ist implizit die Temperatur  $T$  wieder von  $t$  abhängig. Gl. (5) ist z. B. von POST<sup>13</sup>, McWHIRTER<sup>14</sup> et al.<sup>15</sup>, BRETON<sup>16</sup>, sowie von SCHRADE<sup>17</sup> auf den Aufheizvorgang von Plasmen angewendet worden.

Da bis auf wenige Sonderfälle — z. B. Ionisation in der Photosphäre der Sonne und in Gasnebeln — der die Photoionisation enthaltene Term wegen der geringen Strahlungsdichte  $\mathfrak{I}(\nu)$  gegenüber der Ionisation

<sup>6</sup> BIERMANN, L.: *Naturwissenschaften* **34**, 87 (1947).

<sup>7</sup> LÜST, L., F. MEYER, E. TREFFTZ u. L. BIERMANN: *Z. Naturforsch.* **17a**, 259 (1962).

<sup>8</sup> WOOLLEY, R. V. D. R., and C. W. ALLEN: *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **108**, 292 (1948).

<sup>9</sup> MIYAMOTO, S.: *Acta Astron. Cosmophys.* **2**, 29 (1943); — *Publ. Astr. Soc. Jap.* **I** (1950).

<sup>10</sup> ELWERT, G.: *Z. Naturforsch.* **7a**, 432 (1952).

<sup>11</sup> KNORR, G.: *Z. Naturforsch.* **13a**, 941 (1958).

<sup>12</sup> SCHLÜTER, H.: *Z. Naturforsch.* **15a**, 281 (1960); — *Diss. Universität München* 1961; — *Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases*, vol. I, p. 380; — *Z. Naturforsch.* **16a**, 972 (1961).

<sup>13</sup> POST, R. F.: *J. Nuclear Energy, Part C* **3**, 273 (1961).

<sup>14</sup> McWHIRTER, R. W. P.: *Proc. 4th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases* (Uppsala 1959), vol. II, p. 833; — *Proc. Phys. Soc. (London)* **75**, 4 (1960).

<sup>15</sup> HOBBS, G. D., R. W. P. McWHIRTER, W. G. GRIFFIN and T. J. L. JONES: *Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases* (München 1961), vol. II, p. 1965.

<sup>16</sup> BRETON, C.: *Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases* (München 1961), vol. II, p. 2247.

<sup>17</sup> SCHRADE, H.: *Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases*, vol. II, p. 2201.

durch Elektronenstoß vernachlässigt werden kann, ist in allen oben angegebenen Fällen der Ionisationsgrad maßgeblich durch den totalen Ionisationsquerschnitt  $S_i(T)$  bestimmt.  $S_i$  wird durch Integration des differentiellen Ionisationsquerschnittes  $q_i(E)$  über die Geschwindigkeits-Verteilung  $f(v)$  der Elektronen wie folgt gewonnen

$$S_i = \int_{E_i}^{\infty} q_i(E) v f(v) dv, \tag{6}$$

mit  $E$  = Energie der stoßenden Elektronen,  
 $v$  = Elektronengeschwindigkeit,  
 $E_i$  = Ionisationsenergie.

$S_i$  ist also sowohl von  $f(v)$  als auch von  $q_i(E)$  abhängig. Beide Funktionen wirken sich mehr oder weniger empfindlich auf den Ionisationsgrad und damit auf die Temperaturbestimmung aus. Der Einfluß von  $q_i(E)$  und  $f(v)$  auf  $S_i$  und damit auf die Temperaturbestimmung soll hier im einzelnen genauer untersucht werden. Wir erwähnen noch, daß für hinreichend dünne Plasmen ohne metastabile Zustände der Teilchen gesetzt werden kann

$$S_i(T) \cong S_{i,n=1,c}(T)$$

d. h. nur die Ionisation vom Grundzustand  $n = 1$  des Teilchens ins Kontinuum  $c$  ist wesentlich.

### Effektive Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ der Elektronen

Bei allen bisher im Laboratorium durchgeführten spektroskopischen Messungen und Temperaturbestimmungen wird für die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen stets eine Maxwell-Verteilung

$$\frac{dn}{n} = f_M(u') du' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{u'} e^{-u'} du' \tag{7}$$

angenommen.  $u' = \frac{E}{kT_e}$ ;  $E$  = Elektronenenergie;  $T_e$  = Elektronentemperatur.

Diese Annahme setzt voraus, daß tatsächlich

- a) die Elektronen unter sich thermalisiert sind,
- b) das Plasma räumlich so ausgedehnt ist, daß aus der energetischen Flanke der Maxwell-Verteilung keine Elektronen entweichen können, bevor nicht genügend ionisierende Stöße durchgeführt worden sind.

Die Annahme einer Maxwell-Verteilung für die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ist in keiner Weise von vornherein sichergestellt und bedarf einer kritischen Betrachtung: Bei schnellen Aufheizvorgängen von Plasmen kleiner oder mittlerer Dichten werden nämlich insbesondere

die Elektronen kurzzeitig durch starke elektrische und magnetische Felder beeinflußt. Zur Erreichung einer Maxwell-Verteilung muß daher vorausgesetzt werden, daß die Relaxationszeit  $\tau_{\text{eq}}$  zur Thermalisierung der Elektronen wesentlich kleiner als alle anderen Änderungen im Plasma ist.

Zur Berechnung dieser Relaxationszeit wird von SPITZER<sup>18</sup> die Formel angegeben

$$\tau_{\text{eq}} \cong \frac{m^{\frac{1}{2}} (3 k T)^{\frac{3}{2}}}{8 \cdot 0,714 \cdot \pi n e_0^{\frac{1}{2}} Z^4 \ln A} = \frac{11,4 A^{\frac{1}{2}} T^{\frac{3}{2}}}{n Z^4 \ln A} \quad [\text{sec}] \quad (8)$$

mit  $A = \frac{3}{2 Z_1 Z_2} \left( \frac{k^3 T^3}{\pi n_e} \right)^{\frac{1}{2}}$   
 $A = \text{Atomgewicht} \left( = \frac{1}{1680} \text{ für Elektronen} \right),$   
 $T = \text{Temperatur in } ^\circ\text{K},$   
 $n = \text{Teilchendichte in cm}^{-3}.$

Für Teilchendichten von  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  mit einer anfänglichen Energie von 100 eV berechnet man daraus für den Thermalisierungsprozeß der Elektronen eine Zeit von  $\tau_{\text{eq}} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$ . Für Vorgänge, die bei diesen Dichten schneller als  $3 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$  ablaufen kann eine merkliche Abweichung von der Maxwell-Verteilung eintreten, d.h. die für die Ionisierungsprozesse maßgebliche energetische Flanke kann merkbar fehlen. Gl. (8) zeigt, daß insbesondere bei hochfrequent angeregten Plasmen oberhalb von etwa 10 MHz keinesfalls eine Maxwell-Verteilung sichergestellt ist. Dasselbe gilt für die bei Plasma-Kanonen vorliegenden Vorgänge. In beiden Fällen liegen die Elektronentemperaturen zwischen 1 und 1000 eV und die Dichten zwischen  $10^{12}$  und  $10^{14} \text{ cm}^{-3}$ , womit sich  $\tau_{\text{eq}}$  zu  $10^{-6}$  und  $10^{-7} \text{ sec}$  errechnet.

Um nach Erreichung einer Maxwell-Verteilung über das Abdiffundieren der energetischen Elektronen aus dem Plasma eine Aussage machen zu können muß der Diffusionskoeffizient  $D$  bzw. die damit verbundene freie Weglänge  $\lambda$  bekannt sein. Bekanntlich ist die Diffusionsrate  $F$  ganz allgemein für positive bzw. negative Teilchen gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} F^- &= - \frac{\lambda^- v^-}{3} \text{grad } n^- = - D^- \text{grad } n^- \\ F^+ &= - \frac{\lambda^+ v^+}{3} \text{grad } n^+ = - D^+ \text{grad } n^+ \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

<sup>18</sup> SPITZER jr., L.: Physics of Fully Ionized Gases. New York: Interscience Publ. Inc. 1956.

<sup>19</sup> SIMON, A.: An Introduction to Thermonuclear Research. London: Pergamon Press 1959.

<sup>20</sup> MAECKER, H.: Ergeb. exakt. Naturw. 25, 293 (1951).

Da im Nicht-Gleichgewichtszustand für Elektronen die freie Weglänge  $\lambda^-$  sehr viel größer ist als für die positiven Ionen  $\lambda^+$ , und außerdem stets gilt

$$v^- \gg v^+,$$

wäre die Diffusionsrate für Elektronen außerordentlich hoch. Diesem Abdiffundieren von Elektronen halten sofort sich bildende elektrostatische Kräfte die Waage, so daß der Diffusionsstrom unterbunden wird. Man kann bekanntlich zeigen, daß der Hauptanteil der Ionen und Elektronen gemeinsam diffundiert, wobei dieser „ambipolare Diffusionskoeffizient“  $D^{\text{amb}}$  gegeben ist durch

$$D^{\text{amb}} = 2D^+. \tag{10}$$

Nur innerhalb des Debye-Radius  $\varrho_D$

$$\varrho_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n_e e_0^2}} \tag{11}$$

kann eine merkliche Abweichung von der Quasineutralität und damit ein Diffusionsstrom nach Gl. (9) eintreten. Für  $kT_e = 10 \text{ eV}$  und  $n_e = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  folgt  $\varrho_D < 10^{-3} \text{ cm}$ . Das würde bedeuten, daß die Elektronen praktisch vollständig im Plasma festgehalten werden, also *nicht wesentlich* abdiffundieren können.

Die Gl. (11) kann jedoch nur bedingt zur Beantwortung der hier vorliegenden Frage herangezogen werden, nämlich ob Elektronen der energiereichen Maxwell-Flanke entweichen können oder nicht. Unter stationären Bedingungen stellt sich die Temperatur  $T_e$  so ein, daß in bezug auf die den Ionisationsgrad bestimmende Ionensorte  $X$  stets gilt

$$kT_e \approx \frac{1}{8} E_i^X \quad \text{bis} \quad kT_e \approx \frac{1}{10} E_i^X \quad (E_i^X = \text{Ionisationsenergie der Sorte } X).$$

Dies gilt ganz allgemein für jedes Plasma, so daß man für die effektiven, das heißt für die zur Ionisation beitragenden Elektronenenergien im stationären Zustand schreiben kann

$$E_{\text{eff}} \approx 8 kT_e \quad \text{bis} \quad 10 kT_e. \tag{12}$$

Die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung ist für  $E = 8 kT_e$  bereits auf einen verschwindend kleinen Teil der Gesamtteilchenzahl abgefallen. Die Gesamtzahl  $\Delta n_e$  dieser an der Ionisation beteiligten Elektronen pro  $\text{cm}^3$  errechnet sich zu

$$\Delta n_e = n_e \int_{E_{\text{eff}} \approx 8 kT_e}^{\infty} f(v) dv < 10^{-4} n_e. \tag{13}$$

Weicht nun in einem Plasma in einem gewissen räumlichen Gebiet  $dr$  die Elektronendichte von der Ionendichte nur um  $\Delta n_e = 10^{-4} n_e$  ab, so gibt dies Anlaß zu einer Potentialdifferenz  $\Delta V$

$$\Delta V = 2\pi \Delta n_e e_0 (dr)^2. \quad (14)$$

Die resultierende Energiedifferenz  $\Delta E$  ist dann

$$\Delta E = 2\pi \Delta n_e e_0^2 (dr)^2. \quad (15)$$

Definiert man nunmehr genau wie bei der Ableitung der Debye-Länge eine neue Länge  $L$ , für welche die Änderung der potentiellen Energie  $\Delta E$  nach Gl. (15) gerade der für die Ionisation wirksamen Energien, also  $E \approx 10 kT_e$  ist, so folgt

$$L = \sqrt{\frac{10 kT_e}{4\pi \Delta n_e e_0^2}}, \quad (16)$$

und numerisch

$$L = 7,4 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{10 \cdot kT_e}{n_e}},$$

mit  $kT_e$  in [eV] und  $n_e$  in [ $\text{cm}^{-3}$ ].

Für ein Plasma der mittleren Elektronenenergie  $kT_e \approx 10$  eV und einer Dichte  $n_e \approx 10^{14} \text{cm}^{-3}$  resultiert  $L \approx 0,1$  cm. Alle Elektronen mit Energien größer als  $10 kT_e$  vermögen damit über eine größere Distanz als 0,1 cm frei zu diffundieren, sofern die freien Weglängen  $\lambda^-$  dieses zulassen.

Schon bei mittlerer Ionisation ist der Wirkungsquerschnitt praktisch durch den Coulombschen Streuquerschnitt für multiple Streuung bestimmt. Nach SPITZER<sup>18</sup> ergibt sich für  $\lambda^-$

$$\lambda^- = \frac{(Mv^2)^2}{8\pi n (Z_1 Z_2 e_0^2)^2 \ln A} [\text{cm}]. \quad (17)$$

Für ein Plasma mit  $Z_1 = Z_2 = 1$ , einer mittleren Temperatur  $kT = 10$  eV und einer Dichte  $n_e \approx 10^{14} \text{cm}^{-3}$  folgt daraus für die freie Weglänge der Elektronen

$$\lambda^- > 1 \text{ cm}.$$

Sowohl die „Rückhaltelänge“  $L$  als auch die freie Weglänge  $\lambda^-$  der Elektronen ist also häufig nicht mehr klein gegenüber den räumlichen Ausdehnungen von Laborplasmen. Die Elektronen der Maxwell-Flanke können damit ohne wesentliche Stöße aus dem Plasma zu den Gefäßwänden entweichen, wenn nicht z. B. magnetische Felder sie daran hindern.

Das dauernde Abfließen der Elektronen würde das Plasma positiv aufladen und damit nach kurzer Zeit so hohe Feldstärken hervorrufen, daß keine weiteren Elektronen das Plasma verlassen können. Dies trifft in gewisser Weise für isolierte Plasmen ohne Kontakt mit Elektroden zu\*. Erfolgt die Aufheizung des Plasmas jedoch durch ohmsche Heizung, so können über die Kathode genügend Ladungsträger nachgeliefert werden, so daß das Plasma trotz abdiffundierender Elektronen als ganzes vollständig neutral bleibt. Dem Abfluß der Ladungen steht damit keine weitere Rückhaltekraft entgegen, so daß das Plasma ständig an energetischen Elektronen verarmt.

Nach ECKER<sup>21</sup> und ECKERT<sup>22</sup> soll ebenfalls auch für elektrodenlose Entladungen eine von der ambipolaren Diffusion entkoppelte freie Diffusion der energetischen Elektronen stattfinden können. Bezüglich experimenteller Arbeiten verweisen wir auf die Literatur<sup>23-28</sup>.

Das Fehlen der energetischen Teilchenenergien muß durch eine Modifizierung der Geschwindigkeitsverteilung  $f(u')$  berücksichtigt werden, da anderenfalls die spektroskopischen Messungen zu unter Umständen erheblichen Abweichungen führen können in bezug auf die „Temperatur“-Bestimmung. Wir wählen daher als Geschwindigkeitsverteilung mit stark unterdrückter Flanke die sog. Druyvesteyn-Verteilung<sup>29,30</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn}{n} &= f_D(u') du' = 1,039 \sqrt{u'} e^{-0,548 u'^2} du' \\ u' &= \frac{E}{kT_e} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

die z. B. dann gültig ist, wenn in ein Plasma auf der einen Seite Elektronen eingespeist und auf der anderen Seite abgesogen werden, bevor sich durch hinreichend viele Stöße eine Maxwell-Verteilung ausgebildet hat.

\* Von den bei magnetischer Kompression auftretenden sog. „run-away“-Elektronen wird hier abgesehen, da ein stationäres Plasma betrachtet wird.

<sup>21</sup> ECKER, G.: Proc. Phys. Soc. (London) **67**, 485 (1954).

<sup>22</sup> ECKERT, H. U.: Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases (München 1961), vol. I, p. 537.

<sup>23</sup> GIERKE, G. v., W. OTT and F. SCHWIERZKE: Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases (München 1961), vol. II, p. 1412.

<sup>24</sup> SWIFT, J. D.: Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases (München 1961), vol. I, p. 343.

<sup>25</sup> FIELDS, H., G. BEKEFI and S. C. BROWN: Proc. 5th Intern. Conf. Ioniz. Phen. in Gases (München 1961), vol. I, p. 367.

<sup>26</sup> WEIBEL, E.: Phys. Fluids **2**, 52 (1959).

<sup>27</sup> SCHMIDT, G., and D. FINKELSTEIN: Phys. Rev. **126**, 1611 (1962).

<sup>28</sup> WETZEL, L.: Phys. Fluids **5**, 824 (1962).

<sup>29</sup> DRUYVESTEYN, M. J.: Physica **10**, 69 (1930); — Z. Physik **64**, 781 (1930).

<sup>30</sup> ALLIS, W. P.: Motions of ions and electrons. Handbuch der Physik, vol. XXI, S. 381. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.

Je nach den vorliegenden Dichten und Elektronenenergien dürfte die effektive Geschwindigkeitsverteilung zwischen den beiden Verteilungen nach Gl. (7) und Gl. (18) liegen. Für  $0 < u' \leq 2$  unterscheiden sich die beiden Verteilungen im Mittel wenig. Diese Tatsache ist wichtig für die Rekombination. Letztere gibt bekanntlich wesentliche Werte nur für langsame Elektronen, wird sich also für beide Verteilungen wenig unterscheiden. Dagegen sind die Unterschiede in den totalen Ionisierungsquerschnitten außerordentlich groß.

### Differentieller Ionisierungsquerschnitt

Für den differentiellen Ionisierungsquerschnitt  $q_{i,nc}(E)$  \* sind in der Literatur verschiedentlich Formeln angegeben worden, die in mehr oder weniger guter Übereinstimmung mit den Experimenten sind. Mit den Symbolen

$E$  = Energie der stoßenden Elektronen,

$E_{i,nc}$  = Ionisierungsenergie, bezogen auf die  $n$ -te Schale über dem Grundzustand ( $n=1$ ), von der aus die Ionisierung erfolgt,

$E_i^H$  = Ionisierungsenergie des  $H$ -Atoms (= 13,59 eV),

$\xi_n$  = Anzahl energetisch gleichberechtigter Elektronen in der  $n$ -ten Schale,

$f_1; f_2; \varphi$  = Korrektionsfaktoren der Größenordnung 1.

$$U = \frac{E}{E_{i,nc}}; \quad \pi \cdot a_0^2 = 8,79 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^2$$

können die Ionisierungsquerschnitte wie folgt formuliert werden:

$$q_{i,nc}(U) = \pi a_0^2 \left( \frac{E_i^H}{E_{i,nc}} \right)^2 f_1 \xi_n q_{i,\text{red},nc}(U). \quad (19)$$

Wir bemerken, daß für  $U \gg 1$  die Quantenmechanik die asymptotische Lösung liefert

$$q_{i,\text{red},nc}(U) \sim \frac{1}{U} \ln f_2 U. \quad (20)$$

Der Verlauf der Querschnitte als Funktion von  $U$  nach verschiedenen Autoren<sup>10,13,31-33</sup> ist in den Fig. 1 bis 4 wiedergegeben. Wie man sieht,

\* Die Indizes  $i, nc$  zeigen an, daß es sich um einen Ionisierungsprozeß ( $i$ ) handelt, der vom Niveau  $n$  in das Kontinuum  $c$  führt.  $n$  wird in allen Fällen vom Grundzustand des Teilchens aus gerechnet. Das Niveau  $n=1$  ist jeweils der Grundzustand,  $n=2$  das erste angeregte (wasserstoffähnliche) Niveau, usw.

<sup>31</sup> THOMSON, J. J.: Phil. Mag. **23**, 449 (1912); **47**, 337 (1923).

<sup>32</sup> RIPELLE, F. DE LA: J. phys. radium **8**, 319 (1949).

<sup>33</sup> DRAWIN, H.-W.: Z. Physik **164**, 513 (1961) und **168**, 238 (1962).

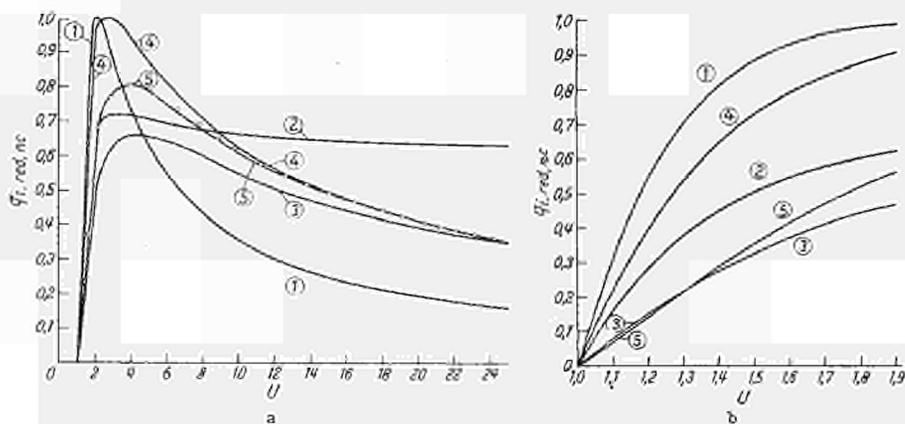


Fig. 1 a u. b. Reduzierter Ionisierungsquerschnitt  $q_{i,red,nc}(U)$ . 1:  $q_{i,red,nc} = 4 \cdot \frac{U-1}{U^2}$  nach <sup>11</sup>; 2:  $q_{i,red,nc} = 2 \cdot \frac{U-1}{U^2} [1 + 0,3(U-1)]$  nach <sup>10</sup>; 3:  $q_{i,red,nc} = 2,85 \frac{1}{U+2} \ln U$  nach <sup>12</sup>; 4:  $q_{i,red,nc} = 2,71 \frac{1}{U} \ln U$  nach <sup>13</sup>; 5:  $q_{i,red,nc} = 2,66 \frac{U-1}{U^2} \ln 1,25 U$  nach <sup>14</sup>. ○○○○○ Experimente nach <sup>15</sup>, <sup>16</sup> für  $H^0 \rightarrow H^+$

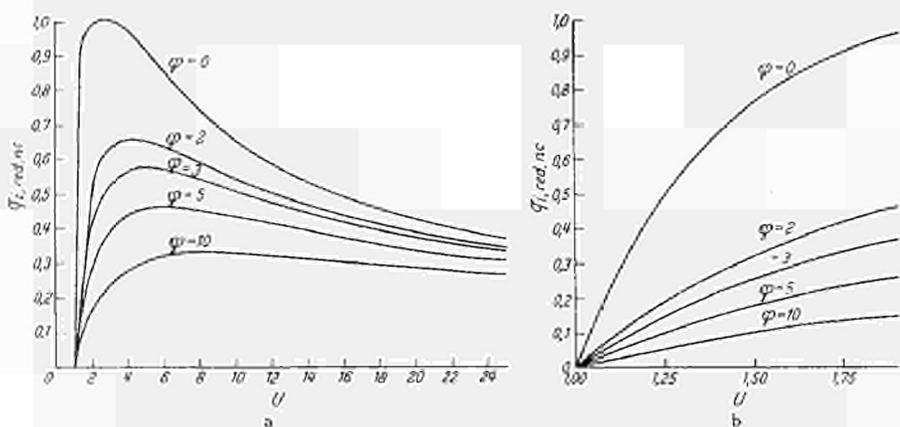


Fig. 2 a u. b. Reduzierter Ionisierungsquerschnitt nach <sup>18</sup>  $q_{i,red,nc} = 2,85 \frac{1}{U-\phi} \ln U$

unterscheiden sich die Kurven einerseits durch die verschiedenen Anstiege  $dq/dU$  bei  $U=1$ , andererseits im Verlauf für hohe Energien. Die „threshold“-Bedingungen <sup>14</sup> bei  $U=1$

$$\left. \begin{aligned} q_{i,red,nc}(U=1) &= 0 \\ \frac{dq_{i,red,nc}(U=1)}{dU} &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

<sup>14</sup> BURGESS, A.: *Astrophys. J.* **132**, 503 (1960).

<sup>15</sup> FITE, W.L., and R.T. BRACKMANN: *Phys. Rev.* **112**, 1141 (1958).

<sup>16</sup> ROTHE, E.W., L.L. MARINO, R.H. NEYNABER and S.M. TRUJILLO: *Phys. Rev.* **125**, 582 (1962).

verbieten in den entsprechenden Gleichungen  $\varphi < -1$  und  $f_2 < 1$ , sowie  $f_2 \leq 0,8$ . Unter Einhaltung dieser Bedingungen führen alle angegebenen Gleichungen bei  $U=1$  zu einem endlichen Anstieg und verschwindendem  $q_{i, \text{red}, n e}$  in Übereinstimmung mit Theorie und Experiment. In praktisch

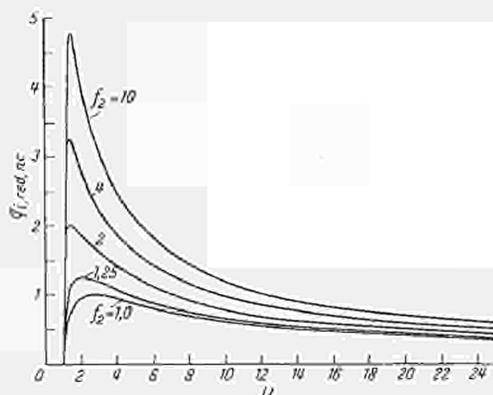


Fig. 3. Reduzierter Ionisationsquerschnitt nach <sup>13</sup>  $q_{i, \text{red}, n e} = 2,71 \frac{1}{U} \ln U$

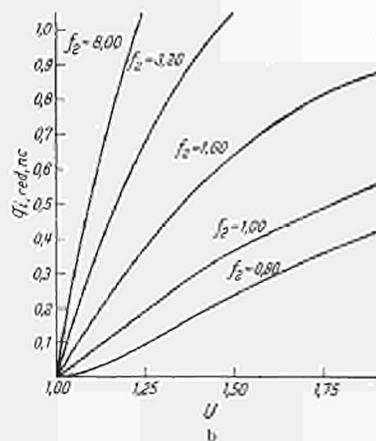
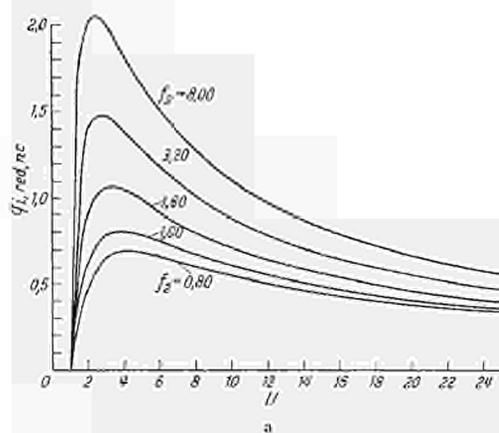


Fig. 4a u. b. Reduzierter Ionisationsquerschnitt nach <sup>14</sup>  $q_{i, \text{red}, n e} = 2,66 \frac{U-1}{U^2} \ln 1,25 f_2 U$

vollständiger Übereinstimmung mit den experimentellen Kurvenverläufen sind die Kurven Nr. 3 und 5 der Fig. 4 bzw. die entsprechenden Kurven in Fig. 2 und 4.

### Berechnung und Vergleich totaler Ionisationsquerschnitte

Zur Beurteilung, in wieweit die von den verschiedenen Autoren angegebenen differentiellen Ionisationsquerschnitte den totalen Ionisationskoeffizienten und damit die Temperaturbestimmung beeinflussen, muß

nunmehr der totale Ionisierungsquerschnitt nach Gl. (6) berechnet werden. Wir wählen hierzu eine reine Maxwell-Verteilung  $f_M(v)$  der stoßenden Elektronen, da dies die am häufigsten auftretende Verteilung ist. Wir definieren die folgenden Gleichungen

$$S_{i, \text{red}, n_c}(u'_{i, n_c}) = \int_{u'_{i, n_c}}^{\infty} q_{i, \text{red}, n_c}(U) v f(v) dv, \tag{22}$$

$$S^*(u'_{i, n_c}) = \frac{1}{E_{i, n_c} \left( \frac{2}{\pi m_0 k T_e} \right)^{\frac{1}{2}}} S_{i, \text{red}, n_c}(u'_{i, n_c}). \tag{23}$$

$S^*$  eignet sich besonders gut für einen Vergleich, da es nur noch von  $u'_{i, n_c}$  abhängt. Unter Einführung der Beziehungen

$$u' = \frac{E}{kT_e}; \quad u'_{i, n_c} = \frac{E_{i, n_c}}{kT_e}; \quad U = \frac{u'}{u'_{i, n_c}}$$

folgt im einzelnen mit Kurve 1 (Fig. 1)

$$S_{\text{Tho}}^* = 8,0 \int_{u'_{i, n_c}}^{\infty} \left( 1 - \frac{u'_{i, n_c}}{u'} \right) e^{-u'} du', \tag{24}$$

mit Kurve 2 (Fig. 1)

$$S_{\text{Elw}}^* = 4,0 \int_{u'_{i, n_c}}^{\infty} \left( 1 - \frac{u'_{i, n_c}}{u'} \right) \left( 1 + 0,3 \left[ \frac{u'}{u'_{i, n_c}} - 1 \right] \right) e^{-u'} du', \tag{25}$$

mit Kurve 3 (Fig. 1)

$$S_{\text{Rip}}^* = 5,70 \int_{u'_{i, n_c}}^{\infty} \left[ \left( \frac{u'}{u' + 2u'_{i, n_c}} \right) e^{-u'} \ln \left( \frac{u'}{u'_{i, n_c}} \right) \right] du', \tag{26}$$

mit Kurve 5 (Fig. 1) für  $f_2 = 1,0$

$$S_{\text{Dr}}^* = 5,32 \int_{u'_{i, n_c}}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{u'_{i, n_c}}{u'} \right) e^{-u'} \ln \left( 1,25 \frac{u'}{u'_{i, n_c}} \right) \right] du'. \tag{27}$$

Das numerische Ergebnis ist in der Tabelle zusammengefaßt. Man erkennt, daß Gl. (26) und (27) praktisch bis auf geringfügige Abweichungen für alle Werte  $u'_{i, n_c}$  überall übereinstimmen, dagegen für die Gl. (24) und (25) davon beträchtlich abweichen können. Da die der Gl. (26) bzw. (27) zugrunde liegenden differentiellen Ionisierungsquerschnitte die experimentellen Ergebnisse am besten beschreiben, dürften die damit berechneten totalen Ionisierungsquerschnitte die z.Z. genauesten sein. Unglücklicherweise ist für die Gl. (26) und (27) keine geschlossene

Integration möglich. Wir haben daher das den totalen Ionisierungsquerschnitt  $S_{i,nc}$  bestimmende Integral als Funktion von  $u'_{i,nc}$  für kleine Intervalle  $\Delta u'_{i,nc}$  auf dem Mercury-computer berechnet<sup>1,2</sup>. Für diese Berechnungen wurde der Ionisierungsquerschnitt nach Fig. 4 zugrunde gelegt, da er bezüglich der analytischen und numerischen Behandlung eine Reihe von Vorteilen aufweist. Man erhält nämlich mit dieser Kurve

Tabelle.  $S^*(u'_{i,nc})$  nach verschiedenen Gleichungen

$u'_{i,nc} = \frac{E_{i,nc}}{kT_e}$	$S^*(u'_{i,nc})$			
	nach Gl. (24)	nach Gl. (25)	nach Gl. (26)	nach Gl. (27)
$1 \cdot 10^{-6}$	$7,999 \cdot 10^0$	$1,200 \cdot 10^6$	$7,546 \cdot 10^1$	$7,382 \cdot 10^1$
$1 \cdot 10^{-5}$	$7,999 \cdot 10^0$	$1,200 \cdot 10^5$	$6,233 \cdot 10^1$	$5,938 \cdot 10^1$
$1 \cdot 10^{-4}$	$7,992 \cdot 10^0$	$1,200 \cdot 10^4$	$4,917 \cdot 10^1$	$4,719 \cdot 10^1$
$1 \cdot 10^{-3}$	$7,941 \cdot 10^0$	$1,202 \cdot 10^3$	$3,587 \cdot 10^1$	$3,473 \cdot 10^1$
$1 \cdot 10^{-2}$	$7,597 \cdot 10^0$	$1,215 \cdot 10^2$	$2,213 \cdot 10^1$	$2,213 \cdot 10^1$
$1 \cdot 10^{-1}$	$7,780 \cdot 10^0$	$1,288 \cdot 10^1$	$8,569 \cdot 10^0$	$9,380 \cdot 10^0$
$3 \cdot 10^{-1}$	$3,753 \cdot 10^0$	$4,277 \cdot 10^0$	$3,611 \cdot 10^0$	$3,920 \cdot 10^0$
$1 \cdot 10^0$	$1,188 \cdot 10^0$	$8,572 \cdot 10^{-1}$	$6,841 \cdot 10^{-1}$	$8,231 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^0$	$3,003 \cdot 10^{-1}$	$1,863 \cdot 10^{-1}$	$1,318 \cdot 10^{-1}$	$1,530 \cdot 10^{-1}$
$4 \cdot 10^0$	$2,559 \cdot 10^{-2}$	$1,445 \cdot 10^{-3}$	$8,994 \cdot 10^{-3}$	$9,541 \cdot 10^{-3}$
$6 \cdot 10^0$	$2,546 \cdot 10^{-3}$	$1,387 \cdot 10^{-3}$	$8,224 \cdot 10^{-4}$	$7,908 \cdot 10^{-4}$
$8 \cdot 10^0$	$2,731 \cdot 10^{-4}$	$1,459 \cdot 10^{-4}$	$8,320 \cdot 10^{-5}$	$7,598 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^1$	$3,064 \cdot 10^{-5}$	$1,617 \cdot 10^{-5}$	$8,982 \cdot 10^{-6}$	$7,873 \cdot 10^{-6}$
$1,2 \cdot 10^1$	$3,543 \cdot 10^{-6}$	$1,855 \cdot 10^{-6}$	$1,011 \cdot 10^{-6}$	$8,567 \cdot 10^{-7}$
$1,4 \cdot 10^1$	$4,187 \cdot 10^{-7}$	$2,178 \cdot 10^{-7}$	$1,170 \cdot 10^{-7}$	$9,655 \cdot 10^{-8}$
$1,6 \cdot 10^1$	$5,030 \cdot 10^{-8}$	$2,604 \cdot 10^{-8}$	$1,383 \cdot 10^{-8}$	$1,116 \cdot 10^{-8}$
$1,8 \cdot 10^1$	$6,120 \cdot 10^{-9}$	$3,157 \cdot 10^{-9}$	$1,662 \cdot 10^{-9}$	$1,317 \cdot 10^{-9}$
$2,0 \cdot 10^1$	$7,524 \cdot 10^{-10}$	$3,870 \cdot 10^{-10}$	$2,022 \cdot 10^{-10}$	$1,574 \cdot 10^{-10}$
$3,0 \cdot 10^1$	$2,344 \cdot 10^{-14}$	$1,195 \cdot 10^{-14}$	$6,098 \cdot 10^{-15}$	$4,484 \cdot 10^{-15}$
$4,0 \cdot 10^1$	$8,101 \cdot 10^{-19}$	$4,109 \cdot 10^{-19}$	$2,072 \cdot 10^{-19}$	$1,473 \cdot 10^{-19}$
$5,0 \cdot 10^1$	$2,968 \cdot 10^{-23}$	$1,502 \cdot 10^{-23}$	$7,516 \cdot 10^{-24}$	$5,227 \cdot 10^{-24}$

unter Verwendung einer Maxwell-Verteilung für den totalen Ionisierungsquerschnitt  $S_{i,nc}$  den Ausdruck<sup>33</sup>

$$S_{i,nc}^{(M)} = a_n^{(M)} \int_{u'_{i,nc}}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{u'_{i,nc}}{u'} \right) e^{-u'} \ln \left( 1,25 f_2 \frac{u'}{u'_{i,nc}} \right) \right] du', \quad (28)$$

$$\text{mit} \quad a_n^{(M)} = 5,32 f_1 \pi a_0^2 \xi_n \left( \frac{2}{\pi m_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{E_i^H}{E_{i,nc}} \right)^2 E_{i,nc} (kT_e)^{-\frac{1}{2}}, \quad (28a)$$

und numerisch

$$a_n^{(M)} = 1,69 \cdot 10^{-6} f_1 \xi_n \left( \frac{E_i^H}{E_{i,nc}} \right)^2 E_{i,nc}^{[eV]} T_e^{[\circ K]^{-\frac{1}{2}}}. \quad (28b)$$

In der letzten Gleichung ist  $E_{i,nc}$  in [eV] und  $T_e$  in [°K] einzusetzen. Man zeigt leicht, daß das Integral in der Gl. (28) im Bereich  $10^{-5} < u'_{i,nc} < 10^{+2}$  bei einer größten Abweichung von etwa 10% im Bereich

um  $u'_{i,nc} \approx 1$  durch folgende Funktion wiedergegeben werden kann \*

$$\frac{1}{a_n^{(M)}} S_{i,nc}^{(M)} = \Psi_n^{(M)}(u'_{i,nc}; f_2) \cong \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{e^{-u'_{i,nc}}}{1 + u'_{i,nc}} \right] \times \\ & \times \left[ \frac{1}{20 + u'_{i,nc}} + \ln \left( 1,25 f_2 \left( 1 + \frac{1}{u'_{i,nc}} \right) \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Dabei ist der erste in der zweiten eckigen Klammer stehende Term in den meisten Fällen gegenüber dem zweiten Term vernachlässigbar.

Unter Verwendung einer Druyvesteyn-Verteilung folgt für den totalen Ionisationsquerschnitt der Ausdruck

$$S_{i,nc}^{(D)} = a_n^{(D)} \int_{u'_{i,nc}}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{u'_{i,nc}}{u'} \right) e^{-0,548 u'^2} \ln \left( 1,25 f_2 \frac{u'}{u'_{i,nc}} \right) \right] du', \quad (30)$$

mit 
$$a_n^{(D)} = 1,55 \cdot 10^{-6} f_1 \xi_n \left( \frac{E_i^H}{E_{i,nc}} \right)^2 E_{i,nc}^{[eV]} T_e^{-\frac{1}{2}}. \quad (30a)$$

In der letzten Gleichung ist  $E_{i,nc}$  in [eV] und  $T_e$  in [°K] zu setzen. Genau wie im obigen Falle kann man zeigen, daß das Integral im Bereich  $10^{-5} < u'_{i,nc} < 10^{+2}$  mit einer größten Abweichung von etwa 50% im Bereich  $u'_{i,nc} \approx 10^{-1}$  durch die Funktion wiedergegeben werden kann

$$\frac{1}{a_n^{(D)}} S_{i,nc}^{(D)} = \Psi_n^{(D)}(u'_{i,nc}; f_2) = 0,548 \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{e^{-0,548 u'^2}}{(1 + u'_{i,nc})^2} \right] \times \\ & \times \left[ \frac{1}{(20 + u'_{i,nc})^2} + \left( \frac{1 + u'_{i,nc}}{1 + u'_{i,nc}} \right) \ln \left( 1,25 f_2 \left( 1 + \frac{1}{0,548 u'_{i,nc}^2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Auch hier ist der erste in der zweiten eckigen Klammer stehende Term in den meisten Fällen gegenüber dem zweiten Term vernachlässigbar.

Vergleicht man nunmehr die für eine Maxwell- und Druyvesteyn-Verteilung berechneten  $S_{i,nc}$ -Werte miteinander, so erkennt man, daß z.B. der Ionisationsgrad für dasselbe  $u'_{i,nc} = \frac{E_{i,nc}}{kT_e} \approx 5$  bei einer Druyvesteyn-Verteilung  $\approx 10^5$ mal geringer ist als bei einer Maxwell-Verteilung der Elektronen. Liegt umgekehrt der Temperaturbestimmung ein z.B. spektroskopisch gemessenes Teilchenverhältnis  $\frac{n_{r+1}}{n_r}$  zugrunde, so folgt bei Verwendung einer Druyvesteyn-Verteilung eine  $\approx 2$ mal höhere Temperatur als bei Verwendung einer Maxwell-Verteilung. Die höhere Temperatur beeinflusst insbesondere die Transportgleichungen des Plasmas sowie geringfügig die Rekombination.

\* Ableitung der Gl. (29) in <sup>1</sup>.

### Totale Rekombinationsquerschnitte

Der totale Rekombinationsquerschnitt für Dreierstoßrekombination und spontanen Elektroneneinfang ist relativ unabhängig von der Wahl der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen in der energetischen Flanke, da einen wesentlichen Beitrag zur Rekombination nur die langsamen Elektronen liefern. Dies zeigt sich z. B. daran, daß sich bei der Berechnung der totalen Querschnitte der Exponentialfaktor heraushebt. (Dies gilt nicht für das bei der Rekombination emittierte Rekombinationskontinuum.) Zur Berechnung von  $Q_R$  und  $Q_3$  kann daher stets eine Maxwell-Verteilung herangezogen werden, denn diese stimmt im Gebiet kleiner und mittlerer Elektronengeschwindigkeiten praktisch mit der Druyvesteyn-Verteilung überein.

Der totale Rekombinationsquerschnitt  $Q_R$  für spontanen Elektroneneinfang kann bekanntlich aus dem von KRAMERS<sup>37, 38</sup> angegebenen differentiellen Rekombinationsquerschnitt  $q_{R,n}(v)$  abgeleitet werden. Nach SPITZER<sup>18</sup> kann der totale Rekombinationsquerschnitt  $Q_R$  für spontanen Elektroneneinfang in wasserstoffähnliche Bahnen wie folgt geschrieben werden:

$$Q_R = 2Z_{\text{eff}} A_R \left( \frac{2kT_e}{\pi m_0} \right)^{1/2} u'_{i,1c} \Phi(u'_{i,1c}) g_1 = 2,07 \cdot 10^{-11} Z_{\text{eff}}^3 T_e^{-1/2} g_1 \Phi(u'_{i,1c}) \quad (32)$$

mit

$$u'_{i,1c} = \frac{E_{i,1c}}{kT_e} = \frac{1,57 \cdot 10^5 \cdot Z_{\text{eff}}^2}{T_e}; \quad g_1 = \text{Gaunt-Faktor} \cong 1,$$

$$\Phi(u'_{i,1c}) = \sum_{n=n_0=1}^{\infty} \frac{u'_{i,1c}}{n^3} e^{-\frac{u'_{i,1c}}{n^2}} \left[ -\text{Ei} \left( -\frac{u'_{i,1c}}{n^2} \right) \right].$$

Die Funktion  $\Phi(u'_{i,1c})$  ist in <sup>1, 2</sup> und <sup>18</sup> wiedergegeben. Wie man daraus ersieht, ändert sich das  $Q_R$  in einem wesentlich geringeren Maße mit der Temperatur als z. B.  $S_{i,n_c}$ .

Der totale Rekombinationsquerschnitt  $n_e Q_3$  gegenüber Dreierstoß im Falle thermodynamischen Gleichgewichtes kann aus der Saha-Eggert-Gleichung (1) abgeleitet werden, indem man bei hohen Dichten die Stoßionisation mit der Dreierstoßrekombination ins Gleichgewicht setzt:

$$S_r(T_e) = \frac{n_{r+1} n_e}{n_r} = \frac{S_i(T_e)}{Q_3(T_e)}. \quad (33)$$

Nimmt man an, daß nur der Ionisations- und Rekombinationsprozeß vom und zum Grundzustand  $n=1$  für das Ionisationsgleichgewicht maß-

<sup>37</sup> KRAMERS, H. A.: Phil. Mag. **46**, 836 (1923).

<sup>38</sup> UNSÖLD, A.: Physik der Sternatmosphären, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

geblich ist, so folgt aus der Saha-Eggert-Gleichung und Gl. (28) bis (30)

$$Q_3(T_e) \cong Q_{3,1}(T_e) = \frac{S_{i,1c}(T_e)}{S_r(T_e)} = \left. \begin{aligned} &= b_{3,1} u'_{i,1c}{}^2 \left[ \frac{1}{20 + u'_{i,1c}} + \ln \left( 1,25 f_2 \left( 1 + \frac{1}{u'_{i,1c}} \right) \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

mit 
$$b_{3,1} = 5,32 f_1 \pi a_0^2 \xi_1 \frac{\hbar^3}{(2\pi m_0)^2} \cdot \frac{u_r(T_e)}{u_{r+1}(T_e)} \left( \frac{E_i^H}{E_{i,1c}} \right)^2 \cdot \frac{1}{E_{i,1c}}, \quad (34a)$$

und numerisch

$$b_{3,1} = 2,596 \cdot 10^{-30} f_1 \xi_1 \frac{u_r(T_e)}{u_{r+1}(T_e)} \left( \frac{E_i^H}{E_{i,1c}} \right)^2 \cdot \frac{1}{E_{i,1c}[\text{eV}]}, \quad (34b)$$

wenn man in der letzten Gleichung  $E_{i,1c}$  in [eV] einsetzt.

Es ist nunmehr interessant, die Rekombinationsraten für spontanen Elektroneneinfang und für Rekombination durch Dreierstoß miteinander zu vergleichen. Die totale Rekombinationsrate für spontanen Elektroneneinfang ist gegeben durch

$$\frac{dn_{R,r}}{dt} = n_{r+1} n_e Q_R \quad [\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}].$$

Die totale Rekombinationsrate für Rekombination durch Dreierstoß ist

$$\frac{dn_{3,r}}{dt} = n_{r+1} n_e^2 Q_3 \quad [\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}].$$

In Fig. 5 sind die entsprechenden Kurven für  $Q_R$  und  $n_e Q_{3,1}$  für ein reines Wasserstoffplasma gezeichnet. Die Schnittpunkte der einander zugeordneten Kurven sind mit  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  hervorgehoben. Man erkennt, daß Gleichheit der beiden Prozesse erst bei Dichten von  $n_e = n_i^H = 5,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  eintritt. Soll der Term  $Q_R$  gegenüber dem Term  $n_e Q_{3,1}$  vernachlässigbar sein, so bedarf es dazu Elektronendichten von  $n_e > 5 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

Im allgemeinen ist bei mittlerer Ionisation und Temperatur das thermodynamische Gleichgewicht jedoch bereits bei Elektronendichten von  $10^{15}$  bis  $10^{16} \text{ cm}^{-3}$  erreicht. Neuere Rechnungen von GIOVANELLI<sup>39</sup>, D'ANGELO<sup>40</sup>, BYRON, STABLER und BORTZ<sup>41</sup>, BATES, KINGSTON und McWHIRTER<sup>42</sup>, sowie Messungen von HINNOV und HIRSCHBERG<sup>43</sup> und

<sup>39</sup> GIOVANELLI, R. G.: Australian J. Sci. Research, Ser. A **1**, 275, 289 (1948).

<sup>40</sup> D'ANGELO, N.: Phys. Rev. **121**, 505 (1961).

<sup>41</sup> BYRON, ST., R. C. STABLER and P. I. BORTZ: Phys. Rev. Letters **8**, 376 (1962).

<sup>42</sup> BATES, D. R., A. E. KINGSTON and R. W. McWHIRTER: Proc. Roy. Soc. (London) (1962) to be publ.

<sup>43</sup> HINNOV, E., and J. G. HIRSCHBERG: Proc. 5th Intern. Conf. on Ioniz. Phen. in Gases (München 1961), vol. I, p. 638.

MOTLEY und KUCKES<sup>44</sup> lassen erkennen, daß die Ionisationsprozesse von und die Rekombinationsprozesse nach höheren Schalen eine weit größere Rolle spielen als bisher angenommen wurde. Diese „kombinierte Dreierstoß-Strahlungsrekombination“ (combined collisional-radiative recombination) führt bereits für Dichten von  $n_e \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  zu einer Rekombinationsrate, die größer ist als die Rekombinationsrate durch spontanen Elektroneneinfang allein, wenn man ein reines Wasserstoff-Plasma mit

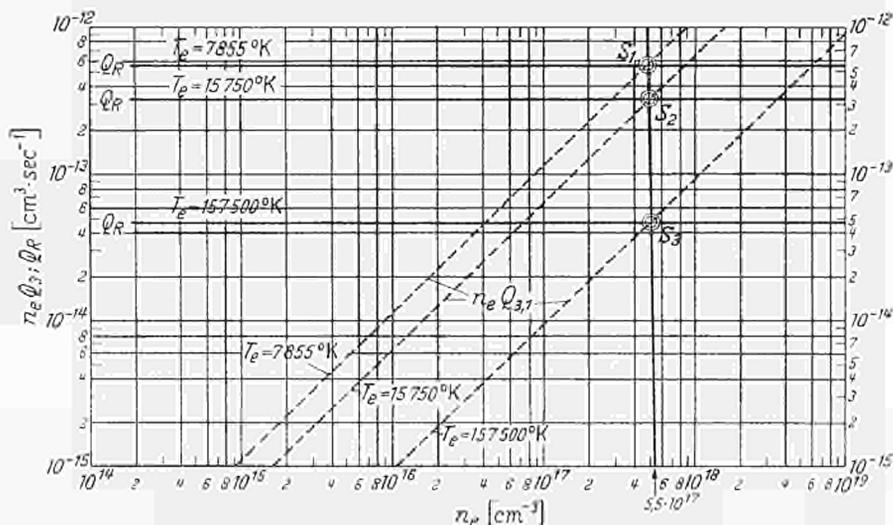


Fig. 5. Totale Rekombinationsquerschnitte  $Q_R$  und  $n_e Q_{3,1}$  für verschiedene Temperaturen und Elektronendichten. Gleichheit  $Q_R = n_e Q_{3,1}$  wird bei  $n_e = 5,5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$  erreicht

Temperaturen zwischen 1000 und 20000 °K annimmt. Die von verschiedenen Autoren angegebenen Werte unterscheiden sich noch etwa um einen Faktor 10, da die Wirkungsquerschnitte nicht genau bekannt sind. Die kombinierte Dreierstoß-Strahlungsrekombination hängt sowohl von den einzelnen Ionierungsquerschnitten  $q_{i,n_e}$  für jede Schale  $n$ , als auch von den Rekombinationsquerschnitten für jede Schale und von den spontanen Übergangswahrscheinlichkeiten  $A_{mn}$  ab.

Insbesondere gehen metastabile Terme sehr empfindlich in das Rechenergebnis ein. Im Übergangsbereich zwischen reinem thermodynamischen und nicht-thermodynamischen Gleichgewicht ist daher eine detailliertere Betrachtung der zu den einzelnen Niveaus gehörenden Prozesse erforderlich, wenn eine genauere Aussage über den Plasmazustand und insbesondere über die Rekombination gemacht werden soll.

<sup>44</sup> MOTLEY, R.W., and A.F. KUCKES: Proc. 5th Intern. Conf. on Ionic Phen. in Gases (München 1964), vol. I, p. 651.

Wegen der im allgemeinen nur sehr mangelhaft bekannten atomaren Konstanten und Wirkungsquerschnitte, stößt man bei der detaillierten Gleichgewichtsbetrachtung auf große Schwierigkeiten.

$Q_3(T)$  kann jedoch sehr allgemein auch wie folgt abgeleitet werden: Solange bei sehr hohen Dichten für jede Schale  $n$  die Stoßprozesse (Stoßionisation, Dreierstoßrekombination) viel häufiger sind als die Strahlungsprozesse befindet sich das Plasma im thermodynamischen Gleichgewicht und es gilt Gl. (1) sowie die Boltzmann-Verteilung

$$n_{r,n} = n_r \frac{g_{r,n}}{u_r(T_e)} e^{-\frac{E_{r,n}}{kT_e}}. \tag{35}$$

Für jedes einzelne Niveau bzw. für jede einzelne Schale gilt dann wieder, daß die Stoßionisation mit der Dreierstoßrekombination im Gleichgewicht steht

$$\frac{n_{r+1} n_e}{n_{r,n}} = \frac{2u_{r+1}(T_e)}{g_{r,n}} \cdot \frac{(2\pi m_0 kT_e)^3}{h^3} e^{-\frac{E_r - E_{r,n} - \Delta E_r}{kT_e}} = \frac{S_{i,nc}(T_e)}{Q_{3,n}(T_e)}, \tag{36}$$

woraus folgt

$$Q_{3,n}(T_e) = b_{3,n} u_{i,nc}'^2 \left[ \frac{1}{20 + u_{i,nc}'} + \ln \left( 1,25 f_2 \left( 1 + \frac{1}{u_{i,nc}'} \right) \right) \right], \tag{37}$$

mit 
$$b_{3,n} = 5,32 f_1 \pi a_0^2 \xi_n \frac{h^3}{(2\pi m_0)^2} \cdot \frac{g_{r,n}}{u_{r+1}(T_e)} \left( \frac{E_i^H}{E_{i,nc}} \right)^2 \cdot \frac{1}{E_{i,nc}}. \tag{38}$$

Zur Berechnung des totalen Rekombinationsquerschnittes  $Q_3(T_e)$ , wie er z. B. zur Anwendung der Gl. (3) benötigt wird, hat man zwei Bereiche zu unterscheiden:

a) Die Anzahl spontaner Deexzitationen von einer Schale  $n$  in tiefer gelegenen Schalen bis hin zum Grundzustand sei wesentlich größer als die Anzahl der Stoßionisationen von dieser Schale aus

$$n_n \sum_{l=1}^{n-1} A_{n,l} > n_n n_e S_{i,nc}.$$

Dann werden alle durch Dreierstoß eingefangenen Elektronen sofort zum Grundzustand weitergegeben, d. h. die Dreierstoßrekombination führt zu einer wahren Rekombination. Damit gilt

$$Q_3(T_e) = \sum_{n=1}^{n^*} Q_{3,n}(T_e). \tag{39}$$

b) Die Anzahl der spontanen Deexzitationen von einer Schale  $n$  in tiefer gelegenen Schalen  $l$  bis hin zum Grundzustand sei vergleichbar

oder kleiner als die Anzahl der Stoßionisationen von dieser Schale aus

$$n_n \sum_{l=1}^{n-1} \leq n_n n_e S_{i,nc}.$$

Dann wird nur ein gewisser Prozentsatz der durch Dreierstoß eingefangenen Elektronen in den Grundzustand weitergeleitet. Dieser zur wahren Rekombination beitragende Anteil ist dann approximativ gegeben durch das Verhältnis der Übergangswahrscheinlichkeiten  $A_{nl}$  zur Ionisationswahrscheinlichkeit  $n_e S_{i,nc}$  (dabei vernachlässigen wir Stoßanregung, die etwa von derselben Größenordnung wie die Übergangswahrscheinlichkeit ist, sowie Deexzitation von sehr hohen Zuständen), also durch

$$Q_{3,n} \cdot \frac{\sum_{l=1}^{n-1} A_{nl}}{n_e S_{i,nc}}.$$

Der totale, zur wahren Rekombination führende Rekombinationsquerschnitt für Dreierstoßrekombination, der sowohl für sehr kleine als auch für sehr hohe Dichten gilt, kann damit geschrieben werden als

$$n_e Q_3(T_e) = n_e \left\{ Q_{3,1}(T_e) + \sum_{n=2}^{n=n^*} \frac{\sum_{l=1}^{l=n-1} A_{nl}}{n_e S_{i,nc} + \sum_{l=1}^{l=n-1} A_{nl}} Q_{3,n}(T_e) \right\}. \quad (40)$$

Die Summation ist bis zu einem oberen  $n = n^*$  zu erstrecken, das sich für große Werte  $n \gg 1$  leicht aus der Saha-Eggert-Gleichung (1) erhalten läßt aus der Bedingung

$$\frac{dn_{r,n}}{dn} = 0.$$

Die führt für Wasserstoff und wasserstoffähnliche Bahnen ( $E_r - E_{r,n} = E_{r,n}/n^2$ ;  $g_{r,n} = 2 \cdot n^2$ ) zu

$$n^* \cong \left( \frac{E_r - \Delta E_r}{kT_e} \right)^{1/2}. \quad (41)$$

$\Delta E_r$  berücksichtigt das durch den interatomaren Stark-Effekt hervorgerufene Vorrücken der Ionisierungsgrenze. Es gilt  $\Delta E_r \cong (r+1) \frac{e_0^2}{\varrho_D}$ , wobei  $\varrho_D$  der Debye-Radius ist. Ist  $n$  nicht mehr sehr viel größer als 1, so ist mit der Summation bei demjenigen  $n = n^*$  aufzuhalten, für das gilt

$$\sum_{l=1}^{n^*-1} A_{n^*l} \cong n_e S_{i,n^*c}. \quad (41a)$$

Der gesamte Rekombinationsquerschnitt einschließlich spontaner Strahlungsrekombination für ein optisch dünnes Plasma ist damit

gegeben durch den Ausdruck

$$\alpha(T_e) = Q_R(T_e) + n_e \left\{ Q_{3,1}(T_e) + \sum_{n=2}^{n=n^*} \frac{\sum_{l=1}^{l=n-1} A_{nl}}{n_e S_{i,n}(T_e) + \sum_{l=1}^{l=n-1} A_{nl}} Q_{3,n}(T_e) \right\}. \quad (42)$$

Die numerische Auswertung der Gl. (42) ist für ein optisch dünnes Wasserstoffplasma mit und ohne Dichtekorrektur in Fig. 6 dargestellt. Es wurde eine Temperatur  $T_e = 15750^\circ \text{K}$  entsprechend  $kT_e = 1,36 \text{ eV}$  für die Rechnungen zugrunde gelegt.

Die Ionisationsformel für ein nicht-thermisches optisch dünnes Plasma lautet mit Gl. (3) und Gl. (42) unter Berücksichtigung der

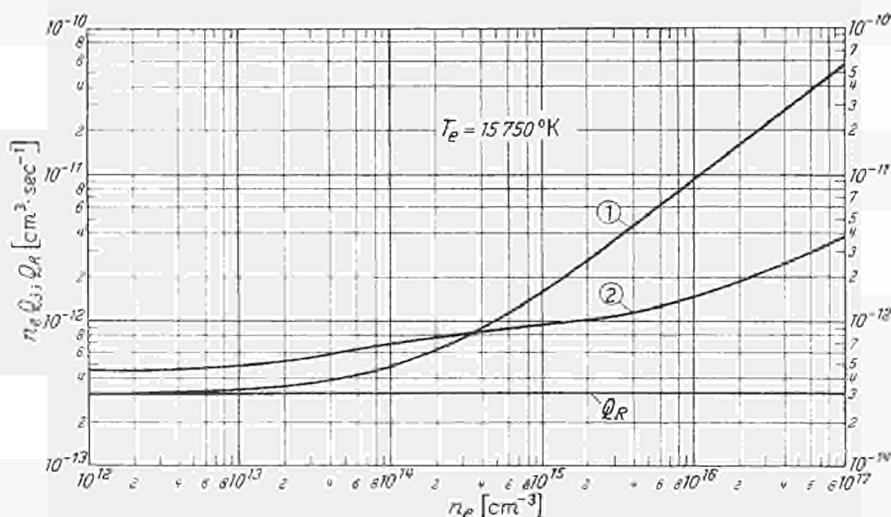


Fig. 6 Totale Rekombinationsquerschnitte mit und ohne Berücksichtigung der Ionisation von angeregten Zuständen  $n > 1$  aus, berechnet für ein reines Wasserstoffplasma der Temperatur  $T_e = 15750^\circ \text{K}$  und reiner Maxwell-Verteilung der Elektronen ( $f_2 = 1,0$  gesetzt für alle  $S_{i,n}$  und  $Q_{2,n}$ ). 1:  $\alpha = Q_R + n_e \sum_{n=1}^{n^*} Q_{3,n}$  nach Gl. (39) und (41). 2:  $\alpha$  berechnet nach Gl. (42) mit  $n^*$  nach Gl. (41a).  $Q_R$  berechnet nach Gl. (32)

### Dreierstoß-Rekombination

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = \frac{S_i(T_e)}{Q_R(T_e) + n_e \left\{ Q_{3,1}(T_e) + \sum_{n=2}^{n=n^*} \frac{\sum_{l=1}^{l=n-1} A_{nl}}{n_e S_{i,n}(T_e) + \sum_{l=1}^{l=n-1} A_{nl}} Q_{3,n}(T_e) \right\}} \quad (43)$$

### Rekombinationskontinua (Frei-Gebunden-Strahlung)

Die Intensität  $\epsilon_n(\nu)$  des Rekombinationskontinuums der  $n$ -ten Schale gegenüber spontanem Elektroneneinfang kann bekanntlich mit Hilfe des differentiellen Rekombinationsquerschnittes  $q_{R,n}(\nu)$  berechnet werden.

Unter Verwendung einer *Maxwell-Verteilung* folgt ohne Berücksichtigung der erzwungenen Emission<sup>45, 46</sup>

$$\varepsilon_n^{(M)}(\nu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} n_{r+1} n_e \cdot \frac{K}{n^3} \cdot \frac{Z_{\text{eff}}^4}{(k T_e)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{h}{k T_e}(\nu - \nu_n)} \quad (44)$$

mit

$$K = \frac{32 \pi^3 e_0^{10}}{3 \sqrt{6} m_0 h^2 c^3} = 2,51 \cdot 10^{-57} \text{ cgs-Einh.}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,129; \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot K = 2,86 \cdot 10^{-57} \text{ cgs-Einh.}$$

$\nu_n$  = Frequenz der Seriegrenze der  $n$ -ten Schale.

Legt man zur Berechnung von  $\varepsilon_n(\nu)$  eine *Druyvesteyn-Verteilung* zugrunde, so folgt für die Intensität des Rekombinationskontinuums der  $n$ -ten Schale

$$\varepsilon_n^{(D)}(\nu) = 1,039 \cdot n_{r+1} n_e \frac{K}{n^3} \cdot \frac{Z_{\text{eff}}^2}{(k T)^{\frac{3}{2}}} e^{-0,548 \cdot \frac{h^2}{(k T_e)^2} (\nu - \nu_n)^2}, \quad (45)$$

mit  $K = 2,51 \cdot 10^{-57}$  cgs-Einh. Die Größe  $\varepsilon_n(\nu)$

wird in beiden Fällen in den Einheiten  $\left[ \frac{\text{erg}}{\text{sec cm}^3 \Delta \nu \text{ ster}} \right]$  gerechnet.

### Frei-frei-Kontinuum (Bremsstrahlung)

Auf dieselbe Weise wie das Rekombinationskontinuum leitet man das Frei-Frei-Kontinuum ab. Bei Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung gilt für nicht zu langwellige Strahlung<sup>18, 38, 45</sup>

$$\varepsilon_{ll}^{(M)}(\nu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} n_{r+1} n_e F \frac{Z_{\text{eff}}^2}{(k T_e)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{h\nu}{k T_e}} \quad (46)$$

mit

$$F = \frac{8 \pi e_0^6}{3 \sqrt{6} m_0 m_0 c^3} = 5,63 \cdot 10^{-47} \text{ cgs-Einh.}$$

Bei Verwendung einer *Druyvesteyn-Verteilung* folgt dagegen

$$\varepsilon_{ll}^{(M)}(\nu) = 1,039 \cdot n_{r+1} n_e F \frac{Z_{\text{eff}}^2}{(k T_e)^{\frac{3}{2}}} e^{-0,548 \left( \frac{h\nu}{k T_e} \right)^2} \quad (47)$$

mit

$$F = 5,63 \cdot 10^{-47} \text{ cgs-Einh.}$$

Die Kontinua hängen in ihrer spektralen Abhängigkeit also empfindlich von der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ab. Damit

<sup>45</sup> FINKELNBURG, W., u. TH. PETERS: Handbuch der Physik, Bd. 28, S. 79—204. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957.

<sup>46</sup> JÜRGENS, G.: Z. Physik 134, 21 (1952).

ist im Prinzip die Möglichkeit gegeben, die Geschwindigkeitsverteilung durch eine spektroskopische Messung der Kontinuumsintensitäten zu erhalten.

### Schlußbetrachtung

Eine vergleichende Betrachtung der in der Tabelle 1 aufgeführten Werte mit den numerisch berechneten Werten, die in <sup>1</sup> wiedergegeben sind, zeigt deutlich, daß man zwei Temperaturgebiete voneinander trennen muß:

a) das Gebiet  $u'_{i,nc} = \frac{E_{i,nc}}{k T_e} < 1 \dots \approx 1,$

b) das Gebiet  $u'_{i,nc} = \frac{E_{i,nc}}{k T_e} \gg 1.$

Im Gebiet  $u'_{i,nc} > 1$  hängt der totale Ionierungsquerschnitt  $S_{i,nc}(u'_{i,nc})$  sehr empfindlich von der gewählten Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen ab. Kleine Änderungen in der Geschwindigkeitsverteilung können bereits recht große Änderungen in der Teilchendichte bzw. der Temperatur zur Folge haben. Die Form des differentiellen Ionierungsquerschnittes geht weniger stark in das Ergebnis ein.

Das Gebiet  $u'_{i,nc} > 1$  trifft im allgemeinen für Plasmen im stationären Zustand zu, in dem außerdem die betrachteten Teilchen (Atome, Ionen) keine metastabilen Zustände haben.

Für das Gebiet  $u'_{i,nc} < 1$  bis  $u'_{i,nc} \approx 1$  ist sowohl die Geschwindigkeitsverteilung als auch der differentielle Ionierungsquerschnitt  $q'_{i,nc}(U)$  für das Ergebnis wesentlich. Dieses letztere Gebiet gilt im allgemeinen für Plasmen, die sich nicht im stationären Zustand befinden. Es kann außerdem für Plasmen zutreffen, in dem angeregte metastabile Zustände stark besetzt sind. Von diesen Zuständen kann eine starke Ionisation ausgehen, da  $u'_{i,nc} = \frac{E_{i,nc}}{k T_e}$  häufig nicht mehr viel größer als 1 ist. Dies trifft z. B. in besonderem Maße für He I und Li II zu. Nahe beim metastabilen Niveau liegende Terme können — bezogen auf das metastabile Niveau — eine Besetzungsdichte aufweisen, die von einer Boltzmann-Verteilung wenig abweicht.

Welche Geschwindigkeitsverteilung ist nun wirksam? Sie läßt sich im Prinzip spektroskopisch aus der Messung der Kontinua ermitteln, da hier die Geschwindigkeitsverteilung mit ihrem exponentiellen Abfall direkt den exponentiellen Intensitätsabfall ergibt. Eine derartige Messung dürfte jedoch nur für intensitätsstarke Plasmen im stationären Zustand bei genügend langer Expositionszeit möglich sein. Eine ergänzende Messung mittels Sonden wird daher im allgemeinen nötig sein. Wird eine separate Messung der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen nicht durchgeführt, so sollte man sich stets darüber im klaren

sein, daß die „spektroskopische Temperaturmessung“ zu Temperaturwerten führen kann, die durchaus um einen Faktor 2 bis 3 von der wirklichen effektiven Temperatur verschieden ist. Unter Temperatur sei hier jedesmal die ihr zugeordnete mittlere kinetische Energie  $\frac{3}{2}kT_e$  der Elektronen verstanden. Eine weitere Fehlerquelle ist dadurch gegeben, daß die kombinierte Dreierstoß-Strahlungskombination nicht berücksichtigt wird, wenn man sich im Übergangsbereich zwischen dem thermodynamischen und nicht-thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Beide Effekte, nämlich Abweichung von der Maxwell-Verteilung in Richtung auf eine Druyvesteyn-Verteilung und kombinierte Dreierstoß-Strahlungsrekombination führen zu höheren Elektronentemperaturen, wenn ein bestimmter Ionisationsgrad eingehalten werden soll.

Abschließend möchte Verfasser Herrn Dr. F. ENGELMANN und Herrn Dipl.-Phys. OXENIUS für anregende Diskussionen und ergänzende Hinweise herzlich danken.



CDNA00396DEC