

**EUR 217.d**

TEIL I

EUROPÄISCHE ATOMGEMEINSCHAFT - EURATOM

ÜBER LÖSUNGSVERFAHREN FÜR DIE  
BOLTZMANN-GLEICHUNG

von

K.-H. MÜLLER

1964



Gemeinsame Kernforschungsstelle  
Forschungsanstalt Ispra - Italien

Hauptabteilung Reaktorphysik  
Theorie und Berechnung der Reaktoren

## HINWEIS

Das vorliegende Dokument ist im Rahmen des Forschungsprogramms der Kommission der Europäischen Atomgemeinschaft (EURATOM) ausgearbeitet worden.

Es wird darauf hingewiesen, dass die Euratomkommission, ihre Vertragspartner und alle in deren Namen handelnden Personen:

- 1° — keine Gewähr dafür übernehmen, dass die in diesem Dokument enthaltenen Informationen richtig und vollständig sind oder dass die Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden und Verfahren nicht gegen gewerbliche Schutzrechte verstößt;
- 2° — keine Haftung für die Schäden übernehmen, die infolge der Verwendung der in diesem Dokument enthaltenen Informationen oder der in diesem Dokument beschriebenen technischen Anordnungen, Methoden oder Verfahren entstehen könnten.

Dieser Bericht wird zum Preise von 40,— bfrs. verkauft.  
Bestellungen sind zu richten an: PRESSES ACADÉMIQUES  
EUROPÉENNES - 98, chaussée de Charleroi - Brüssel 6.

Die Zahlung ist zu leisten durch Überweisung :

- an die BANQUE DE LA SOCIÉTÉ GÉNÉRALE (Agence  
Ma Campagne) - Brüssel - Konto Nr. 964.558,
- an die BELGIAN AMERICAN BANK AND TRUST  
COMPANY - New York - Konto Nr. 121.86,
- an die LLOYDS BANK (Foreign) Ltd. - 10, Moorgate -  
London E.C.2,

als Bezug ist anzugeben : „EUR 217.d - (Teil I) Über Lösungs-  
verfahren für die Boltzmann-Gleichung“.

Gedruckt von Vanmelle, s.a. — Gent.  
Brüssel, Februar 1964.

## EUR 217.d

### TEIL I

ÜBER LÖSUNGSVERFAHREN FÜR DIE BOLTZMANN-GLEICHUNG  
von K.-H. MÜLLER.

Europäische Atomgemeinschaft - EURATOM.

Gemeinsame Kernforschungsstelle - Forschungsanstalt Ispra (Italien).

Hauptabteilung Reaktorphysik - Theorie und Berechnung der Reaktoren.  
Brüssel, Februar 1964 - 11 Seiten - 4 Abb.

Es wird ein Funktional angegeben, das die  $P_1$ -Approximation an die Boltzmann-Gleichung der Neutronendynamik als Euler'sche Gleichungen besitzt. Die Forderung an die zugehörigen Extremwerte ist also dem Differentialgleichungs-System der  $P_1$ -Approximation äquivalent. Zum Auffinden der Lösung des Variationsproblems bietet sich die direkte Methode der Variationsrechnung an. Ein auf konkrete Reaktorprobleme passendes abgeschlossenes System von Auswahlfunktionen gestattet in übersichtlicher und einfacher Weise die Berechnung von Kritikalität und Neutronenfluss.

---

## EUR 217.d

### PART I

THE APPLICATION OF THE DIRECT METHOD OF THE VARIATIONAL-  
CALCULUS by K.-H. MÜLLER.

European Atomic Energy Community - EURATOM.

Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy).

Reactor Physics Department - Reactor Theory and Calculation.  
Brussels, February 1964 - 11 pages - 4 figures.

A functional is given in which the  $P_1$  approximation to the Boltzmann equation of neutron dynamics is in the form of Euler equations. The requirement for the related extreme values is thus equivalent to the differential equation system of the  $P_1$  approximation. The direct method of calculating variations can be used to solve the variation problem. An exclusive system of selection functions, suitable for concrete reactor problems, provides a clear and simple method of calculating criticality and neutron flux.

---

## EUR 217.d

### PART I

THE APPLICATION OF THE DIRECT METHOD OF THE VARIATIONAL-  
CALCULUS by K.-H. MÜLLER.

European Atomic Energy Community - EURATOM.

Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy).

Reactor Physics Department - Reactor Theory and Calculation.  
Brussels, February 1964 - 11 pages - 4 figures.

A functional is given in which the  $P_1$  approximation to the Boltzmann equation of neutron dynamics is in the form of Euler equations. The requirement for the related extreme values is thus equivalent to the differential equation system of the  $P_1$  approximation. The direct method of calculating variations can be used to solve the variation problem. An exclusive system of selection functions, suitable for concrete reactor problems, provides a clear and simple method of calculating criticality and neutron flux.

---

## EUR 217.d

### PART I

THE APPLICATION OF THE DIRECT METHOD OF THE VARIATIONAL-  
CALCULUS by K.-H. MÜLLER.

European Atomic Energy Community - EURATOM.

Joint Nuclear Research Center - Ispra Establishment (Italy).

Reactor Physics Department - Reactor Theory and Calculation.  
Brussels, February 1964 - 11 pages - 4 figures.

A functional is given in which the  $P_1$  approximation to the Boltzmann equation of neutron dynamics is in the form of Euler equations. The requirement for the related extreme values is thus equivalent to the differential equation system of the  $P_1$  approximation. The direct method of calculating variations can be used to solve the variation problem. An exclusive system of selection functions, suitable for concrete reactor problems, provides a clear and simple method of calculating criticality and neutron flux.

Über die direkte Methode eliminiert man auch aus der Boltzmann-Gleichung die Raumkoordinaten und gelangt so zu einem Punktmodell, d.h. zu einer Integro-Differentialgleichung, die nur noch die Zeit und die Geschwindigkeit der Neutronen als unabhängige Variablen enthält.

Teil II gibt Lösungsverfahren für die reduzierte Boltzmann-Gleichung an und im dritten Teil werden Beispiele numerisch durchgerechnet.

---

With the direct method the spatial coordinates are also eliminated from the Boltzmann equation, so that a point model, i.e. an integral-differential equation, is obtained, in which the only independent variables are now the neutron speed and time.

Part II gives methods for solving the reduced Boltzmann equation and in Part III examples are worked out numerically.

---

With the direct method the spatial coordinates are also eliminated from the Boltzmann equation, so that a point model, i.e. an integral-differential equation, is obtained, in which the only independent variables are now the neutron speed and time.

Part II gives methods for solving the reduced Boltzmann equation and in Part III examples are worked out numerically.

---

With the direct method the spatial coordinates are also eliminated from the Boltzmann equation, so that a point model, i.e. an integral-differential equation, is obtained, in which the only independent variables are now the neutron speed and time.

Part II gives methods for solving the reduced Boltzmann equation and in Part III examples are worked out numerically.

# EUR 217.d

TEIL I

EUROPÄISCHE ATOMGEMEINSCHAFT - EURATOM

## ÜBER LÖSUNGSVERFAHREN FÜR DIE BOLTZMANN-GLEICHUNG

von

K.-H. MÜLLER

1964



Gemeinsame Kernforschungsstelle  
Forschungsanstalt Ispra - Italien

Hauptabteilung Reaktorphysik  
Theorie und Berechnung der Reaktoren

Manuskript erhalten am 21.11.1963

## Teil I: Die Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung

### Einleitung

In vielen Gebieten der theoretischen Physik haben im Laufe der Zeit die Methoden der Variationsrechnung eine zentrale Position errungen, bisweilen wurden sie geradezu an den Problemen dieser Disziplinen entwickelt. Wie die Literatur ausweist, hat man bei Reaktorberechnungen nur sehr zögernd von der Variationsrechnung Gebrauch gemacht, und wenn, dann nur in formalem Sinne. Die sog. "direkte" Methode [1] wurde hier bisher so gut wie nicht angewandt. Es liegt also - im Hinblick auf die durchschlagenden Erfolge in den anderen Gebieten - nahe, auch die Reaktorphysik in den Anwendungsbereich miteinzubeziehen.

Die von uns durchgeführten Studien zu diesem Thema wurden in drei Teile zerlegt und werden in kurzem Zeitraum aufeinanderfolgend veröffentlicht. Die Dreiteilung wurde gewählt, um unsere Ausführungen übersichtlich zu halten und den Leser nicht zu verwirren. Dem Weiteren wird zugrunde gelegt, daß alle auftretenden äußeren Quellen und Materialkenngrößen stetige Funktionen der Zeitkoordinate sind.

### 1. Diffusionsmodell in Multigruppennäherung

In vielen praktisch wichtigen Fällen reicht es aus, statt der Boltzmann-Gleichung eine Mehrgruppen-Näherung zu verwenden [2]. Unter Berücksichtigung von verzögerten Neutronenemittern ergibt sich über die  $P_1$ -Approximation für zwei Energiegruppen das System:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{v_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \nabla \cdot (D_1 \nabla \phi_1) - \alpha_1 \phi_1 + \nu \beta_2 \phi_2 + \nu \sum_{n=1}^6 \lambda_n \int_{-\infty}^t \beta_n e^{-\lambda_n(t-\tau)} \phi_2 d\tau + S_1 \\ \frac{1}{v_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \nabla \cdot (D_2 \nabla \phi_2) - \alpha_2 \phi_2 + \alpha_1 \phi_1 + S_2 \\ \phi_k(x_0, t) = 0 \quad ; \quad \phi_k(x_1, 0) = 0 \quad ; \quad k=1,2 \end{array} \right.$$

zur Bestimmung der Flüsse  $\phi_k(x, t)$ . Die Punkte der (evt. extrapolierten) Reaktoroberfläche seien mit  $x_0$  bezeichnet.

## 2. Das äquivalente Variationsproblem

Wir gehen von der selbstadjungierten DGL. aus:

$$(2) \quad \begin{cases} Mu \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b \frac{\partial u}{\partial y} \right) - cu - f = 0 \\ u(x_0) = 0. \end{cases}$$

Dieser DGL. läßt sich das Variationsproblem:

$$J(u) = \iint_{\mathcal{R}} \left[ a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + cu^2 + 2fu \right] dx dy = \mathcal{R}etr.$$

zuordnen [1].

Schreibt man  $J(u)$  etwas um:

$$(3) \quad J(u) = \iint_{\mathcal{R}} \left[ (\operatorname{grad} u)(D \operatorname{grad} u) + ucu + 2uf \right] dx dy = \mathcal{R}etr.,$$

dann liegt nahe, für das weitaus kompliziertere Gleichungssystem der Multigruppen-Näherung der Reaktordynamik, das wir mit

$$(4) \quad \begin{cases} M\phi = S \\ \phi(x_0, t) = 0 \end{cases}$$

abkürzen wollen, anzusetzen:

$$(5) \quad \begin{cases} J(\phi, \phi^+) = \iint_{\mathcal{R}} \left[ (\nabla \phi^+)^+ \cdot (D \nabla \phi) + \phi^+(F\phi - S) \right] dV dt = \mathcal{R}etr. \\ \phi(x_0, t) = \phi^+(x_0, t) = 0 \end{cases}$$

$\nabla \phi$  bezeichnet den Vektor  $\begin{pmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}$  und  $\phi^+$  die zu  $\phi$  adjungierte Funktion. Diese genügt der Gleichung:

$$(6) \quad \begin{cases} M^+ \phi^+ = 0 \\ \phi^+(x_0, t) = 0. \end{cases}$$

Den Operator  $M^+$  findet man über die Definitionen:

$$(7) \quad \iint_{TV} [\Phi^+ M \Phi - \Phi M^+ \Phi^+] dV dt = 0.$$

Nun wollen wir zeigen, daß (4)(6) und (5) einander äquivalent sind. Dazu bedarf es einer Fallunterscheidung, je nachdem, ob die Materialkenngrößen über das Reaktorvolumen hinweg stetig oder unstetig variieren.

#### A. Stetigkeit

Wir transformieren (5) mit den Relationen:

$$(8) \quad \int \nabla \cdot \Psi dV = \oint \Psi \cdot df \quad (\text{Gauss})$$

$$(9) \quad U \nabla^+ (D \nabla T) = \nabla^+ (U D \nabla T) - (\nabla U)^+ (D \nabla T)$$

und erhalten, da

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_V (\nabla \Phi^+)^+ (D \nabla \Phi) dV = - \int_V \Phi^+ \nabla^+ (D \nabla \Phi) dV + \oint \Phi^+ D \frac{\partial \Phi}{\partial n} df \\ F - \nabla^+ (D \nabla) \equiv M, \end{array} \right.$$

schließlich:

$$(11) \quad \mathcal{F}(\Phi, \Phi^+) = \iint_{TV} \Phi^+ (M \Phi - S) dV dt$$

Dieser Ausdruck wird nun variiert:

$$(12) \quad \delta \mathcal{F}(\phi, \phi^+) = \iiint_{TV} \delta \phi^+ (M\phi - S) dV dt + \iiint_{TV} \phi^+ M \delta \phi dV dt.$$

Mittels (7) gehen wir hier beim zweiten Integral auf den adjungierten Operator  $M^+$  über:

$$(13) \quad \delta \mathcal{F}(\phi, \phi^+) = \iiint_{TV} \delta \phi^+ (M\phi - S) dV dt + \iiint_{TV} \delta \phi M^+ \phi^+ dV dt.$$

Da  $\delta \phi$  und  $\delta \phi^+$  beliebig gewählt werden können und unabhängig von einander operieren, ist für das Erreichen des Extremums:

$$\mathcal{F}(\phi, \phi^+) = \text{extr.}$$

notwendig:

$$(14) \quad \begin{cases} M\phi = S \\ \phi(x_0, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M^+ \phi^+ = 0 \\ \phi^+(x_0, t) = 0 \end{cases}$$

### B. Unstetigkeiten

Die Materialkenngrößen sollen über  $V$  stückweise stetig sein, d.h. endlichviele endliche Sprünge haben (fig. 1). Dies bedeutet, daß zwar  $(D\nabla\phi)$

fig. 1\*)

fig. 2

über das Reaktorvolumen hinweg stetig ist, aber  $\nabla\phi^+$  es nicht zu sein braucht. Wir zerlegen deshalb  $V$  geeignet in Teilvolumina  $V_i$  (fig. 2). Aus (10) wird dann:

$$(10') \quad \begin{aligned} \int_V (\nabla\phi^+)^+ (D\nabla\phi) dV &= \sum_i \int_{V_i} (\nabla\phi_i^+)^+ (D_i \nabla\phi_i) dV_i \\ &= \sum_i \int_{V_i} \phi_i^+ \nabla^+ (D_i \nabla\phi_i) dV_i + \sum_i \oint \phi_i^+ (D_i \nabla\phi_i \cdot df_i). \end{aligned}$$

\*) Figuren im Anhang

$\Phi^+$  und  $(D\nabla\phi)$  verläuft über die Grenzflächen hinweg stetig. Da aber bei  $d\ell$  stets die äußere Normale verwendet wird und  $\Phi^+(r_0) = 0$  ist, fällt die Summe über die Oberflächen-Integrale weg. Relation (11) und die daraus folgende Schlußweise bleibt also auch hier gültig.

### 3. Die Lösung des Variationsproblems

Von nun an können wir also statt mit System (4) mit dem Variationsproblem (5) oder auch (11) arbeiten. In (5) bzw. (11) braucht allein  $\Phi^+$  variiert zu werden; dies reicht aus, wie wir oben zeigten. Wir verwenden zur Lösung die sog. direkte Methode der Variationsrechnung [1].

Als Auswahlfunktionen setzen wir an:

$$(15) \quad \begin{cases} \tilde{\Phi} = A(t) \cdot \Psi(r) & \tilde{\Phi}^+ = \Psi^+(r) \cdot A^+(t) \\ \Psi(r_0) = 0 & \Psi^+(r_0) = 0, \end{cases}$$

wobei  $A(t) = \{a_{1k}\}_{\substack{k=1,2,\dots,m \\ l=1,2,\dots,n}}$  eine Rechteckmatrix darstellt und die  $\Psi_k$  bzw.  $\Psi_k^+$ , Komponenten des Vektors  $\Psi$  bzw.  $\Psi^+$ , Elemente eines vollständigen Funktionensystems  $Q$  bzw.  $Q^+$  sind. Unter dieser Voraussetzung nämlich bilden die Näherungslösungen für wachsendes  $n$  eine Minimalfolge von Näherungen, d.h.  $n$  ist ein Maß für die Approximationsgüte.  $m$  gibt die Anzahl der Energiegruppen wieder.

Es ist leicht einzusehen, daß bei diskreter Schichtung das Funktional (5) dem Funktional (11) im Hinblick auf die Konvergenzgüte überlegen ist. Bei (11) wird die überall in  $V$  stetige Funktion  $\nabla(D\nabla\tilde{\Phi})$  dazu verwendet, das an den Diskontinuitätsflächen springende  $\nabla(D\nabla\phi)$  approximativ darzustellen. Diese Schwierigkeit tritt bei (5) nicht auf, da dort nur mit  $(D\nabla\tilde{\Phi})$  statt  $(D\nabla\phi)$  gearbeitet wird. Jedes Problem, das sich über (5) lösen läßt, kann natürlich auch mit (11) angegangen werden. Bei vorgegebener Approximationsgüte ist

$$n_{(11)} > n_{(5)},$$

wobei  $n_{(11)}$  bzw.  $n_{(5)}$  den Approximationsgrad bei Verwendung von Gl. (11) bzw. (5) bedeutet. Der weitere Gang verläuft folgendermaßen:

Man setzt (15) in (5) ein und führt die Raumintegration durch:

$$(16) \quad \mathcal{J}(\phi, \phi^+) = \int_T G\left(\frac{\partial A}{\partial t}, A, A^+, t\right) dt = \text{Ext.}$$

Wie gesagt, braucht man nur hinsichtlich  $A^+ = \{a_{1k}^+\}$  zu variieren. Das Integral  $J$  nimmt nun, da die  $a_{1k}^+$  unabhängig voneinander agieren, für

$$(17) \quad \frac{\partial G}{\partial a_{1k}^+} = 0 \quad \begin{cases} l=1, 2, \dots, m \\ k=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

einen Extremalwert an.

Aus (11) und (17) folgt sofort:

$$(18) \quad \int_V \psi_{k'} (M\phi - S)_{k'} dV = 0 \quad k, k' = 1, 2, \dots, n.$$

Dieses Gln.-System bezeichnen wir als die GALERKIN'schen Gleichungen unseres Problems. Es stellt im allgemeinen ein System von raumunabhängigen Integro-DGln. für die  $a_{1k}(t)$  dar, das es nun zu lösen gilt. Die  $a_{1k}^+(t)$  brauchen jedoch bei Kritikalitäts- und Flußberechnungen nicht bestimmt zu werden. Das aus (5) und (17) folgende und zu (18) korrespondierende System  $\int f(\psi_{k'}, \psi_{k'}) dV = 0$  findet man ebenfalls durch elementare Rechnung.

Ein sehr einfaches Funktionensystem  $Q$  - für eine überall konvexe Oberfläche des Reaktors - haben wir in:

$$(19) \quad \omega(x_0 - x^k) x^k y^l z^v \quad \omega > 0 \text{ in } V \text{ ist ein Polynom mit } \omega(0) = 0.$$

Man kann leicht nachweisen, daß es vollständig ist. Alle Elemente von  $Q$  erfüllen die gewünschten Randbedingungen.

Nach dem WEIERSTRASS'schen Approximationssatz lassen sich nun aus (19) Näherungslösungen für den Flußvektor konstruieren.

Die Bestandteile  $\psi_k^+$  des adjungierten Vektors  $\phi^+$  entnimmt man zweckmäßigerweise aus demselben Funktionensystem, d.h.  $Q = Q^+$ . Die zugehörige Koeffizientenmatrix  $A^+(t)$  setzen wir als geeignet gewählt voraus, mehr brauchen wir von ihr nicht zu wissen.

fig. 3

fig. 4

Zur Errechnung der mittleren Lebensdauer der Neutronen benötigt man allerdings noch den adjungierten Fluß  $\phi^+$ . Zum Auffinden der zugehörigen Koeffizientenmatrix  $A^+(t)$  verwenden wir gemäß (13)

$$(18') \quad \int_V \psi_k (M^+ \phi^+)_{k'} dV = 0 \quad k, k' = 1, 2, \dots, n.$$

#### 4. Boltzmann-Gleichung

Die soeben dargelegten Untersuchungen werden derzeit durch eine Reihe von praktisch wichtigen Beispielen numerisch illustriert. Die zugehörigen Ergebnisse erscheinen in Kürze als Teil II unserer Studien. In diesem Teil wird dann auch auf zahlreiche numerische Probleme eingegangen, die bei der Bearbeitung konkreter Fragen der Reaktorberechnung auftreten.

Da die Verwendung der Variationsrechnung im obengenannten Sinne nicht an das Diffusionsmodell oder eine Gruppeneinteilung gebunden ist, liegt es nahe, sie direkt auf die Boltzmann-Gleichung anzuwenden. In Gl. (11) ist dabei lediglich für  $M$  der Operator:

$$(20) \quad M = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla + \alpha(x, \omega, t) - \int \beta(x, \omega', \omega, t) \dots d\omega'$$

einzusetzen.  $\phi$  ist nun kein Vektor wie in (11) mehr, sondern die allgemein verwendete skalare Feldfunktion. Die Integration - gemäß (11) - über das Reaktorvolumen  $V$  eliminiert die Raumabhängigkeit.

Um zu dem (5) entsprechenden Funktional zu gelangen, verwenden wir die Relationen:

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} M \equiv L + \omega \cdot \nabla \\ \int \phi^+ (\omega \cdot \nabla \phi) dV = - \int \phi (\nabla \cdot \omega \phi^+) dV + \oint \phi \phi^+ (\omega \cdot d\mathcal{F}) \end{array} \right.$$

Damit ergibt sich, da das Oberflächenintegral verschwindet:

$$(5') \quad \mathcal{F}(\phi, \phi^+) = \int \int_{\tau, \nu} [ \phi^+ (L\phi - S) - \phi (\nabla \cdot \omega \phi^+) ] dV dt = \mathcal{E}_{ext}.$$

Die obigen Aussagen über den Approximationsgrad von (5) und (11) gelten unverändert für (5') bzw. (11'), d.h.

$$n(11') > n(5').$$

Im allgemeinen ist jetzt bei den Auswahlfunktionen  $\psi_k$  das Gewicht  $\omega(0) \neq 0$ . Zur Lösung von (5') bzw. (11') verwenden wir nun den Ansatz:

$$(15') \quad \tilde{\Phi} = \sum \varphi_k(t, \mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}) ; \quad \tilde{\Phi}^+ = \sum \varphi_k^+(t, \mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r})$$

und erhalten nach Elimination der Ortskoordinaten ein System von Integro-DGln. für die  $\varphi_k$ . Dieses System wird zweckmäßigerweise über

$$(22) \quad Y = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}$$

etwas umgeschrieben. Wir gewinnen so die Matrixdarstellung

$$(23) \quad \frac{\partial Y}{\partial t} + \sum (t, \mathbf{r}) Y = \int K(t, \mathbf{r}', \mathbf{r}) Y(t, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' + S(t, \mathbf{r}).$$

Wir bezeichnen fernerhin diese Integralgleichung als die "reduzierte" Boltzmann-Gleichung.

Im Teil II unserer Untersuchungen beschäftigen wir uns im wesentlichen mit Gl. (23).

Bemerkung:

Läßt man die Forderung nach zeitstetigen Quellen und Materialkenngrößen fallen, dann enthält die Lösungsschar der Boltzmann-Gl. auch Funktionen mit wandernden Unstetigkeitsflächen, sog. "Wellenlösungen". Das Studium solcher Ausbreitungsvorgänge ist einer gesonderter Arbeit vorbehalten.

## Literatur

- [1] Funk, P. "Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik", Berlin 1962
- [2] Weinberg-Wigner, "The physical theory of neutron chain reactors", Chicago 1959

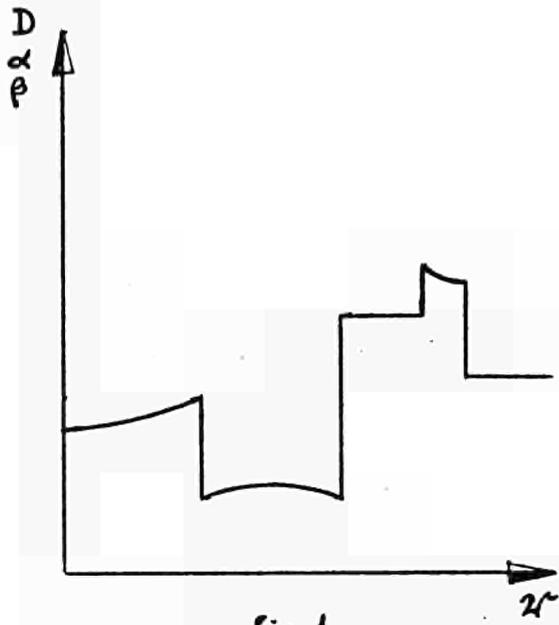


Fig. 1

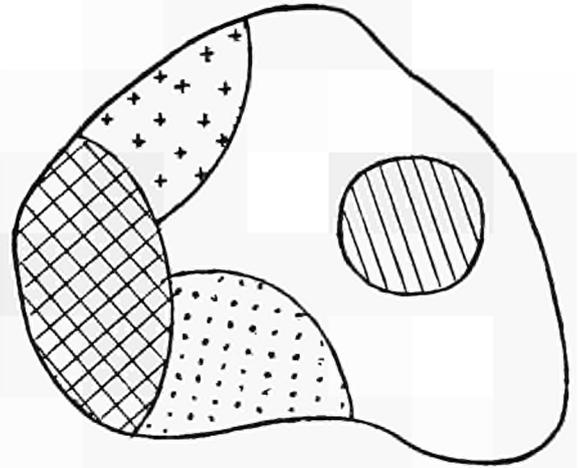


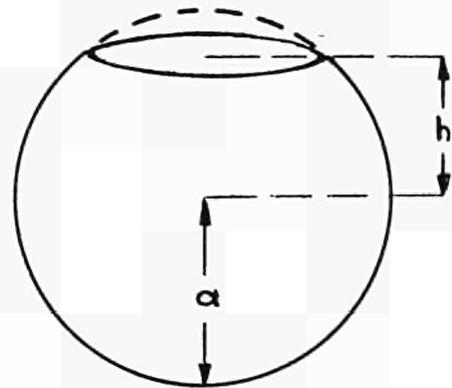
Fig. 2



$$\omega(r_0 - r) = (h^2 - z^2)(a^2 - x^2 - y^2)$$

Kreiszyylinder

Fig. 3



$$\omega(r_0 - r) = (h - z)(a^2 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Kugelkalotte

Fig. 4





CDNA00217DEC